Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

Геометрия

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

Геометрия

7 класс

Учебник

для общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106 — 5215/576 от 14.10.2011) и Российской академии образования (№ 01 — 5/7д — 347 от 17.10.2011)

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» — российской школе»

Руководители проекта: вице-президент РАН, акад. *В. В. Козлов*, президент РАО, акад. *Н. Д. Никандров*, генеральный директор издательства «Просвещение», чл.-корр. РАО *А. М. Кондаков*

Научные редакторы серии: акад. РАО, д-р пед. наук *А. А. Кузнецов*, акад. РАО, д-р пед. наук *М. В. Рыжаков*, д-р экон. наук *С. В. Сидоренко*

Авторы:
А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот

Условные обозначения

▲▼ — дополнительный материал внутри пункта

□ ■ — начало и конец доказательства

★★ — начало и конец материала повышенной трудности, необязательного для всех

Геометрия. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений /
Г36 [А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот]; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». — М. : Просвещение, 2013. — 176 с. : ил. — (Академический школьный учебник). — ISBN 978-5-09-020053-0.

Учебник является первой частью трёхлетнего курса геометрии для общеобразовательных школ. Учебник написан в соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования. В текстах имеются справки словесника с переводами и пояснениями геометрических терминов, комментарии с интересными фактами. Задачный материал разнообразен и представлен в рубриках по видам деятельности, позволяющим формировать познавательные универсальные учебные действия. После каждой главы предлагаются задачи на повторение и задачи под рубрикой «Применяем компьютер», рассчитанные на работу с компьютерной средой *Живая математика*.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-020053-0

Оглавление

Введение. Что такое геометрия 5
1. Как возникла и что изучает геометрия 5
2. О задачах геометрии 6
3. Плоские и пространственные фигуры 7
4. Задачи 8
5. Плоскость, прямая, точка 10
6. Об истории геометрии. Значение геометрии 12

Глава I. Начала геометрии 15
§ 1. Отрезки 15
1.1. Отрезок 15
1.2. Лучи и прямые 19
1.3. Сравнение и равенство отрезков 21
1.4. Действия с отрезками 25
1.5. Измерение длины отрезка. Расстояние между точками 27
1.6. Понятие о равенстве фигур. Равенство треугольников 32

§ 2. Окружность и круг. Сфера и шар 35
2.1. Определения окружности и круга 35
2.2. Части окружности и круга 38
2.3. Центральная симметрия 42
2.4. Построения циркулем и линейкой 46
2.5. Как определяют сферу и шар 48
2.6. Сферическая геометрия 51

§ 3. Углы 53
3.1. Что называют углом в геометрии. Смежные углы 53
3.2. Равенство углов. Свойство равных углов 56
3.3. Откладывание угла 60
3.4. Сравнение углов. Прямой угол. Биссектриса угла 64
3.5. Построение биссектрисы угла. Построение прямого угла 66
3.6. Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые 69
3.7. Действия с углами 71
3.8. Измерение углов 75
3.9. Двугранный угол 80
Задачи к главе I 81

Глава II. Треугольники 88
§ 4. Первые теоремы о треугольниках 88
4.1. О теоремах 88
4.2. Элементы треугольника 88
4.3. Первый признак равенства треугольников 90
4.4. Равенство соответственных углов равных треугольников 93
4.5. Теорема о внешнем угле треугольника. Классификация треугольников 96
4.6. Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра 100
4.7. Доказательство способом от противного. Второй признак равенства треугольников 102
4.8. Высота треугольника 103

§ 5. Сравнение сторон и углов треугольника 106
5.1. Равнобедренный треугольник 106
5.2. Серединный перпендикуляр 112
5.3. Взаимно обратные утверждения 115
5.4. Сравнение сторон и углов треугольника 117
5.5. Осевая симметрия 122
Задачи к главе II 127

Глава III. Расстояния и параллельность 131
§ 6. Расстояние между фигурами 131
6.1. Понятие о расстоянии 131
6.2. Неравенство треугольника 136

§ 7. Параллельность прямых 139
7.1. Признаки параллельности прямых 139
7.2. Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности 142
7.3. Проблема пятого постулата 146
7.4. Свойства углов, образованных параллельными и секущей 147
7.5. Построение прямоугольника 149
7.6. Полоса 154

§ 8. Сумма углов треугольника 155
8.1. Теорема о сумме углов треугольника 155
8.2. Следствия из теоремы о сумме углов треугольника 158
Задачи к главе III 161

Дополнение. Аксиома прямоугольника и параллельность 165
Итоги 168
Тесты 169
Предметный указатель 171
Ответы 173
Список рекомендуемой литературы 175

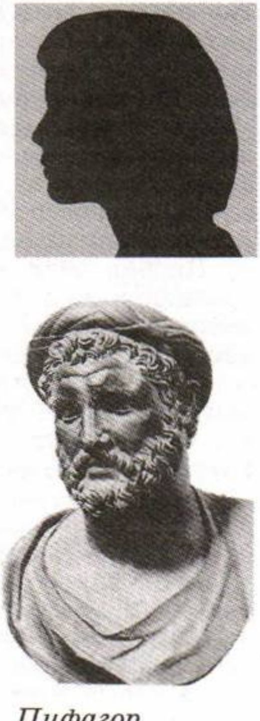
Введение

Что такое геометрия

1. Как возникла и что изучает геометрия

Имя древнегреческой богини Земли Геи звучит в названиях многих наук: *география, геология, геофизика* и др. Всё это науки о Земле. И слово *геометрия* в переводе с греческого означает *измерение Земли*, или *землемерие*. Значит, геометрия возникла в связи с измерением земельных участков. Когда же это произошло? Вот какими замечательными словами отвечал на этот вопрос ещё в IV в. до н. э. греческий учёный Евдем Родосский: «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении Земли. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путём чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума».

Из этих слов вы поняли, что геометрия очень древняя наука, но о том, чем она занимается, в них сказано мало. Поэтому обратимся к Математической энциклопедии. А в ней написано: «Геометрия — часть математики, первоначальным предметом которой являются пространственные отношения и формы тел. Геометрия изучает пространственные отношения и формы, отвлекаясь от прочих свойств реальных предметов (плотность, вес, цвет и т. д.)». Отвлекаясь, значит — не обращая внимания. Когда геометры изучают какой-нибудь реальный предмет (нечто существующее в природе или сотворённое человеком), то им неважно, из чего он сделан и какого он цвета. Им интересна его форма и как он устроен, какие имеет свойства, в частности размеры, площадь поверхности, объём, и как он расположен по отношению к другим реальным предметам.



Пифагор

Рис. 1

Любой предмет окружающего нас пространства можно рассматривать как геометрическую фигуру, если принимать во внимание только его форму и размеры (например, силуэт или скульптуру, рис. 1). В геометрии вместо слова *предмет* говорят *фигура* (слово *фигура* употребляют ещё и в других смыслах: например, шахматная фигура, политическая фигура и т. п. — вы, конечно, не перепутаете значения этого слова). **Фигура** — это мысленный образ реального предмета, в котором сохраняются только форма и размеры, и только они принимаются во внимание. А **геометрия** — это наука о фигурах.

2. О задачах геометрии

Одна из первых задач геометрии состоит в сравнении фигур, т. е. практически в сравнении форм и размеров предметов.

Допустим, идёт строительство дома из отдельных частей: тут и бетонные плиты, и оконные рамы и пр. Надо уметь сравнивать, одинаковые ли привезли, например, плиты. Обычно принято говорить, что в геометрии две фигуры называются равными, если они совпадают при наложении друг на друга. Но если ещё довольно легко наложить одну оконную раму на другую, то наложить одну бетонную плиту на другую без подъёмного крана просто невозможно! Но этим и не нужно заниматься. Достаточно сравнить несколько размеров таких плит. В данном случае можно обойтись без всяких рулеток и мерных линеек. Можно воспользоваться простой бечёвкой. Но как с помощью бечёвки сравнить две плиты, сколько размеров потребуется сравнить, чтобы убедиться, что плиты одинаковые? Геометрия отвечает на этот вопрос... Если трудно наложить бетонные плиты одну на другую, то для стен домов или участков земли это вовсе невозможно: их сравнение можно осуществить только сравнением некоторых размеров.

Первая задача геометрии и состоит в сравнении фигур путём сравнения в них отдельных размеров, в выяснении признаков, по которым можно судить, равны фигуры или нет. В частности, соответствует ли данная фигура, т. е. предмет, стандарту или образцу?

При сравнении размеров фигур часто пользуются *измерением*. Но само измерение тоже есть сравнение. Так, измеряя длину предмета, его сравнивают с образцом, который представляет единицу длины, например с метровой линейкой.

Мы только что сказали о сравнении предмета с образцом, со стандартом. Но чтобы иметь образец, надо его сделать. Поэтому можно сказать, что «самая первая задача» геометрии состоит в том, чтобы указать, как делать нужные по форме и размерам образцы предметов, какие размеры следует выдержать, чтобы получился задуманный предмет. Такую задачу решают, когда делают разметку на заготовке для изготовления какой-нибудь детали или разметку на материале для того, чтобы скроить одежду, и т. п. В геометрии занимаются фигурами и говорят не о том, чтобы сделать фигуру, а о том, чтобы построить её, т. е. говорят о геометрических построениях...

Итак, самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы давать точно обоснованные правила для построения фигур с теми или иными заданными свойствами. А как построить фигуру с нужными свойствами? Например, ещё в Древнем Египте знали, что построить прямой угол можно, построив треугольник со сторонами 3, 4, 5. Почему же один из углов этого треугольника — прямой? Это пример ещё одной задачи геометрии — *по одним свойствам фигур делать заключения о других их свойствах.*

3. Плоские и пространственные фигуры

Вы уже знаете некоторые геометрические фигуры: отрезок, прямоугольник, квадрат, круг, треугольник и др. Всё это плоские фигуры (рис. 2). На рисунках 3—4 изображены неплоские — пространственные фигуры: несколько **многогранников** — куб, прямоугольный параллелепипед, пирамиды, а также шар. Многогранники ограничены многоугольниками, которые называются их **гранями**. Например, у куба шесть граней — шесть квадратов (см. рис. 3, а). Стороны граней многогранника называются его **рёбрами**, а вершины граней — **вершинами многогранника**. Например, у куба двенадцать рёбер и восемь вершин. Обратите внимание, что, изображая многогранники, рисуют все их ребра, но часть из них (невидимые рёбра) рисуют штриховой линией (см. рис. 3 и 4).

Самый знакомый вам многоугольник — **прямоугольник** (см. рис. 2, б). Прямоугольником называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны между собой, а все углы прямые. Соседние стороны прямоугольника перпендикулярны, а противоположные —

Рис. 2

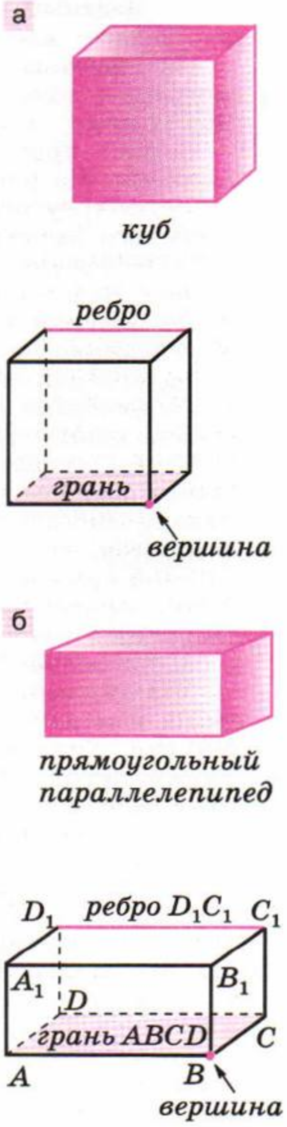


Рис. 3

параллельны. Частным случаем прямоугольника является **квадрат** — это прямоугольник, все стороны которого равны друг другу (см. рис. 2, в).

Самый известный вам многогранник — это **прямоугольный параллелепипед** (см. рис. 3, б). У него шесть граней, и все они прямоугольники. Частный случай прямоугольного параллелепипеда — куб (см. рис. 3, а).

Из простых фигур можно получить более сложные с помощью двух операций: **объединение фигур** и **пересечение фигур**.

Самый простой многоугольник — это треугольник. На рисунке 5, а изображено объединение двух треугольников в различных случаях их взаимного расположения.

Объединение фигур — это фигура, состоящая из всех точек данных фигур.

На рисунке 5, б изображено пересечение двух треугольников в различных случаях их взаимного расположения.

Пересечение фигур — это фигура, состоящая из всех общих точек данных фигур.

Чтобы лучше представлять себе пространственные фигуры, можно использовать их модели. Модели многогранников удобно складывать из их **развёрток**, вырезанных из тонкого картона или плотной бумаги. На рисунке 6, а изображена развёртка прямоугольного параллелепипеда, не являющегося кубом, на рисунке 6, б — развёртка куба, на рисунке 6, в, г — развёртки пирамид.

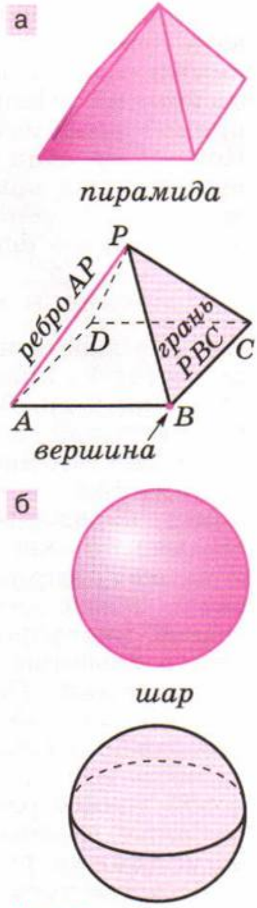


Рис. 4

Мы напомнили несколько определений известных вам понятий, а также дали и новые определения. Если вы забудете определение какого-либо понятия, то в Предметном указателе в конце учебника указано, в каком пункте вводится это понятие. В конце учебника имеется список рекомендуемой дополнительной литературы по геометрии.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие геометрические фигуры вам знакомы?
2. О каких двух видах геометрических фигур было сказано в этом пункте?
3. Как вы понимаете термины *объединение фигур* и *пересечение фигур*?
4. Как из простых геометрических фигур можно получить более сложные фигуры?
5. Какие элементы многогранников вы знаете?
6. Какие задачи решает геометрия?

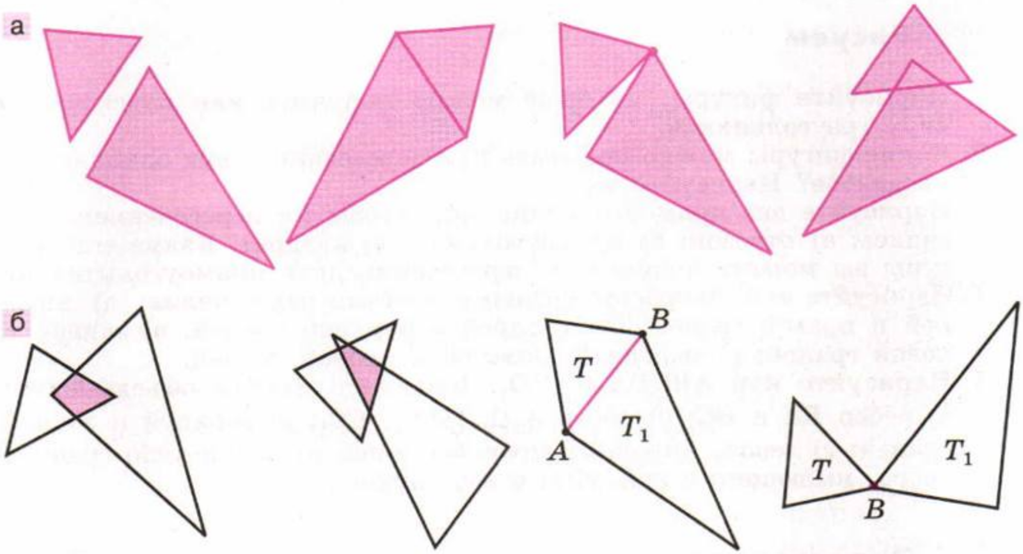


Рис. 5

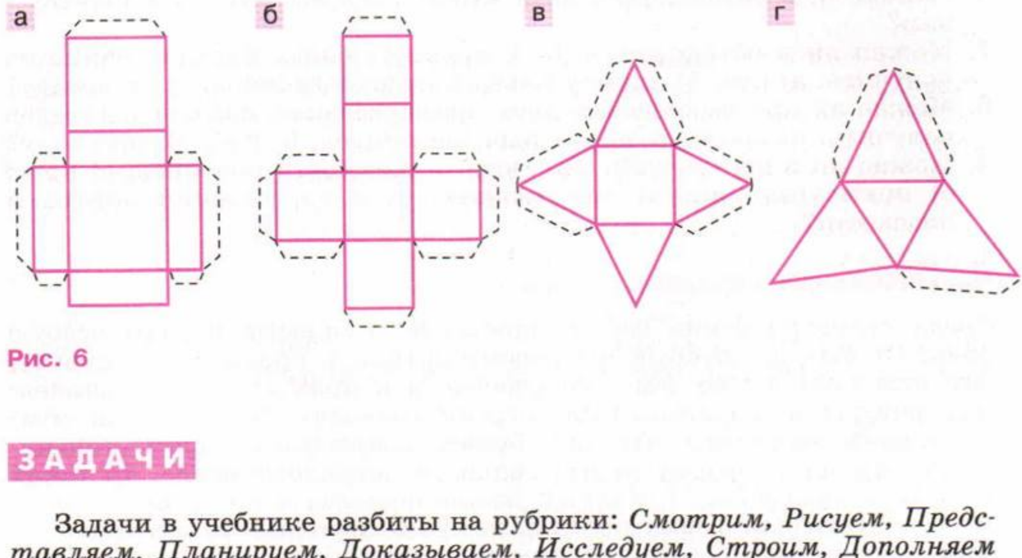


Рис. 6

ЗАДАЧИ

Задачи в учебнике разбиты на рубрики: *Смотрим, Рисуем, Представляем, Планируем, Доказываем, Исследуем, Строим, Дополняем теорию, Находим величину, Применяем геометрию, Работаем с формулой, Разбираемся в решении, Работаем с моделью, Рассуждаем* и т. д. Заголовки рубрик подсказывают, что нужно делать, решая задачи этой рубрики. Обобщающий характер имеют Задачи к главам. В них имеется рубрика *Применяем компьютер.*

Рисуем

1. Нарисуйте фигуры, которые можно получить как пересечение двух треугольников.
2. Какие фигуры можно получить как пересечение двух одинаковых квадратов? Нарисуйте их.
3. Нарисуйте два прямоугольника так, чтобы их пересечением оказались: а) отрезок; б) прямоугольник; в) квадрат. Какие ещё фигуры вы можете получить в пересечении двух прямоугольников?
4. Нарисуйте куб. Закрасьте разными цветами пересечение: а) нижней и правой граней; б) передней и верхней граней; в) задней и левой граней; г) передней, нижней и правой граней.
5. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выделите цветом объединение: а) рёбер BA и BC; б) рёбер A_1D_1, D_1C_1, CC_1; в) верхней и задней граней; г) левой, нижней и правой граней; д) какой-либо грани и ребра, имеющего с ней общую вершину.

Представляем

6. Можно ли в объединении двух кубов получить куб? А в пересечении?
7. Можно ли в объединении двух прямоугольных параллелепипедов получить: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) пирамиду?
8. Можно ли при пересечении двух прямоугольных параллелепипедов получить: а) прямоугольный параллелепипед; б) куб; в) пирамиду?
9. Можно ли в пересечении цилиндра и плоскости получить: а) круг; б) прямоугольник; в) треугольник? А в пересечении конуса и плоскости?

4. Плоскость, прямая, точка

Среди геометрических фигур плоскости и прямые играют особую роль. От фигур, которые мы рассматривали в предыдущем пункте, они отличаются уже тем, что плоскости и прямые — неограниченные фигуры (а те фигуры были ограниченными). Поэтому если можно сказать, например, что лист бумаги имеет форму прямоугольника, а кирпич — форму прямоугольного параллелепипеда, то таких реальных предметов, о которых можно сказать, что они имеют форму плоскости или форму прямой, не существует. (Поэтому, точно говоря, нельзя нарисовать, например, прямую.) Как пришли геометры к понятиям плоскости и прямой, мы попытаемся пояснить.

Каждый реальный предмет имеет протяжённость в пространстве. Обычно говорят о протяжённости в трёх направлениях: в длину, ширину и высоту. Но случается так, что нас интересуют только две величины: длина и ширина. Высота (толщина) нас может не интересовать. Например, вам в данный момент не интересна толщина тетрадного листа. В тех случаях, когда мы отвлекаемся от высоты реального предмета, мы называем его плоским. Размышляя о плоских предметах, представляя их неограниченными, геометры пришли к понятию **плоскости**. Наглядное представление о плоскости можно получить, разглядывая поверхность стола, стены и т. д. и воображая их неограниченно продолженными во все стороны (рис. 7). На практике проверить, что поверхность какого-то предмета плоская, можно с помощью линейки: если, прикладывая линейку к поверхности во всевозможных направлениях, мы нигде не получим зазора, значит, поверхность плоская.

Рис. 7

Может случиться так, что нас не интересует не только высота, но и ширина реального предмета. Например, когда мы отправляемся в дорогу, то нас интересует её длина, но отнюдь не ширина. Мысленным образом реального предмета, в котором нас интересует только длина, является **линия**. Наглядное представление о линии можно получить, разглядывая кусок проволоки. Линию рисует карандаш (если его не отрывают от бумаги), или конёк фигуриста (не отрывающийся ото льда), или светящаяся ракета во время фейерверка (рис. 8), или планеты и звезды при движении по небесной сфере и т. п.

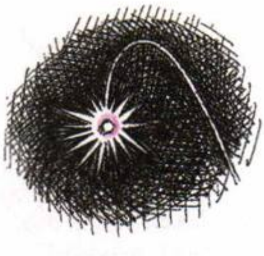
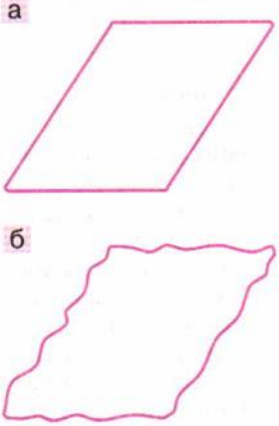


Рис. 8

Самой простой и **основной линией является отрезок**. Размышляя об отрезках, представляя их неограниченными, геометры пришли к понятию **прямой**. Наглядное представление о прямой можно получить, глядя на линию горизонта или на уходящий рельс железной дороги.

И наконец, нас может не интересовать даже и длина реального предмета, а не только его высота и ширина. Например, когда мы говорим о расстоянии между звездами, то пренебрегаем всеми размерами звёзды, хотя и они громадны. На тёмном ночном небе громадные звёзды кажутся нам светящимися точками. Из светящихся точек складывается изображение на экране телевизора. На футбольном поле место, с которого бьют одиннадцатиметровый штрафной удар, обозначают *точкой*.

а



б

Рис. 9

Размышляя о таких реальных предметах, размерами которых можно пренебречь, геометры

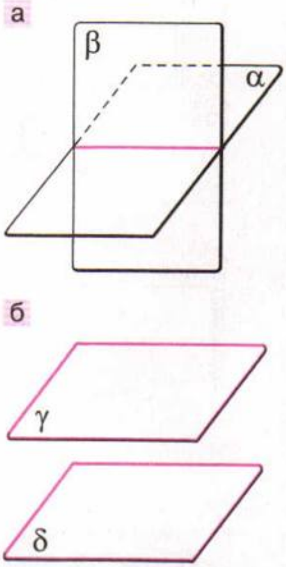


Рис. 10

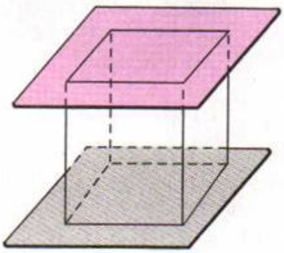


Рис. 11

пришли к понятию точки. Наглядное представление о точке можно получить, глядя на след от ножки циркуля на листе бумаги.

Точки обозначают большими латинскими буквами: A, B, C, ... **Прямые** обозначают малыми латинскими буквами: a, b, c, ...

Плоскости обозначают малыми греческими буквами: α (альфа), β (бета), γ (гамма), δ (дельта), ...

Как изображают различные плоскости, показано на рисунке 9, а, б. Можно рисовать и так, как на рисунке 9, а, и так, как на рисунке 9, б. На рисунке 10, а изображены **пересекающиеся плоскости** α и β. Так называют две плоскости, имеющие общие точки. **Пересечением двух плоскостей, имеющих общую точку, является прямая.**

На рисунке 10, б изображены две плоскости, которые не имеют общих точек: γ и δ. Такие плоскости называются **параллельными**.

Примерами пересекающихся и параллельных плоскостей служат плоскости граней прямоугольного параллелепипеда (рис. 11): плоскости его противоположных граней параллельны, а плоскости соседних граней пересекаются (по прямой, на которой лежит ребро прямоугольного параллелепипеда). Всё это вы можете увидеть в своей классной комнате.

5. Об истории геометрии. Значение геометрии

Как мы уже говорили, геометрия как практическая наука зародилась в Древнем Египте несколько тысяч лет тому назад. Первоначально она была набором правил, которые помогали измерять площади, объёмы, решать задачи, возникавшие при сооружении оросительных каналов, грандиозных храмов, пирамид и т. п. Особенно важной была задача распределения земельных участков.

В Египте плодородная земля тянется узкой полосой в долине Нила, а за её пределами простирается пустыня. Пригодной для земледелия земли было мало, и каждый её клочок представлял собой большую ценность. Поэтому, когда ежегодно разливы Нила смывали границы участков, нужно было их восстанавливать как можно точнее. Этим занимались специальные землемеры, которые и были, можно сказать, первыми геометрами. Известно, что в своих геометрических построениях египтяне пользовались верёвками. Например, они натягивали на колышки верёвку с двенадцатью узелками и строили таким образом треугольник (рис. 12) со сторонами 3, 4, 5, в котором есть прямой угол. Этот треугольник до сих пор называют «египетским треугольником» (мы о нём уже говорили в п. 2).

Накопленные египтянами обширные знания о свойствах геометрических фигур заимствовали греки в период VII—V вв. до н.э. Они называли египетских геометров-землемеров «герпедонаптами», т. е. «верёвковязателями». В Древнем Египте геометрия была сугубо прикладной наукой, а в Древней Греции она стала математической теорией. Имена великих геометров Древней Греции: Фалеса, Пифагора, Евклида, Архимеда и многих других — хорошо известны и в наши дни. Об одном из них — Евклиде мы расскажем уже сейчас.

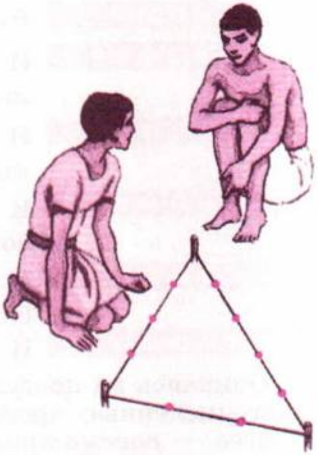


Рис. 12

Евклид работал в Александрии в III в. до н.э. Славу Евклиду создал его собирательный труд «Начала». В 13 книгах «Начал» изложены основы геометрии того времени, а также геометрическим языком и основы алгебры и теории чисел. Научные и педагогические достоинства «Начал» настолько велики, что это сочинение стало основным руководством по геометрии на две тысячи лет. Поэтому можно было бы назвать Евклида «величайшим школьным учителем, которого только знает история математики», как сказал уже в XX в. знаменитый алгебраист Ван-дер-Варден.

Важнейшее достоинство «Начал» в том, что в основу своих выводов Евклид положил **постулаты** и **аксиомы**. Слово *постулатум* — это латинский перевод греческого слова «требование». А греческое слово *аксиома* означает «предложение, достойное признания». И в самом деле, если и можно в чём-то сомневаться в геометрии, то только в постулатах. Все остальные её результаты получены чисто логическим путём, а потому не могут подвергаться сомнениям. Будущее показало, насколько была верна такая позиция Евклида.

Постулатов у Евклида пять. В первых трёх из них говорится о возможности простейших построений.

Постулат 1 От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

Постулат 2 И ограниченную прямую (т. е. отрезок) можно непрерывно продолжить по прямой.

Постулат 3 И из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

В четвёртом постулате говорится о равенстве прямых углов. О пятом постулате мы скажем позднее.

В аксиомах у Евклида речь идёт об общематематических положениях. Всего у Евклида девять аксиом. Приведём некоторые из них.

Аксиома 1 Равные одному и тому же равны и между собой.

Аксиома 2 И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

Аксиома 3 И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

Аксиома 5 И удвоенные одного и того же равны между собой.

Аксиома 6 И половины одного и того же равны между собой.

Аксиома 8 И целое больше части.

Опираясь на постулаты и аксиомы, Евклид затем выводит из них многочисленные *предложения*, т. е. *теоремы* (от греческого слова theoreo — *рассматривать*, однокоренное с ним — *теория*), и решает задачи на построение фигур с заданными свойствами. Мы вслед за Евклидом будем опираться на эти и аналогичные им утверждения, а также сформулируем те положения, на которые опираются наши выводы. Роль Евклида в истории геометрии столь велика, что геометрию, основы которой он изложил в своих «Началах», стали называть *евклидовой геометрией*. Её мы с вами и будем изучать. Слово «Начала» — это русский перевод латинского слова elementa (*элементы*), а потому изложенную в «Началах» Евклида геометрию называют *элементарной*. Ту часть геометрии, которая изучает плоские фигуры, называют **планиметрией** (по латыни planum — *плоскость*), а ту её часть, в которой рассматривают неплоские фигуры, — **стереометрией** (по-гречески stereos — *пространственный*).

Всё, что ни есть, находится в пространстве, все тела имеют какую-то форму и размеры, как-то взаимно расположены. Потому всюду — геометрия. Она самая основная наука наряду с арифметикой. С геометрией мы сталкиваемся в обыденной жизни уже потому, что окружены более или менее правильными геометрическими формами домов, комнат, мебели и нередко применяем простейшие выводы геометрии хотя бы в измерении жилой площади.

На производстве, в технике геометрия нужна всюду, особенно когда необходимо обеспечить точность форм и размеров. Для многих наук геометрия составляет основу. Скажем, в физике изучают законы движения тел. Но для того чтобы описывать движения одних тел по отношению к другим, нужно уметь определять взаимное положение тел, а это задача геометрии.

Геометрия составляет также основу искусства, потому что изучает законы симметрии, законы перспективы, законы пропорций, а значит, основы законов красоты. Архитектура — это воплощённая в строительстве геометрия. Словом, всё, что ни есть в мире, всё находится в пространстве, всё имеет свои формы, и люди сами их создают. И во всём этом — геометрия.

Глава I

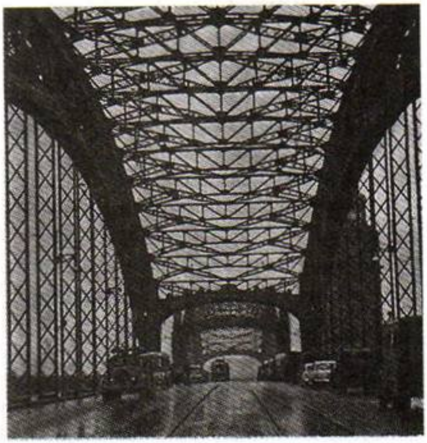
Начала геометрии

В этой главе рассматриваются давно знакомые вам геометрические фигуры: отрезки, окружности, углы. Мы кратко повторим то, что уже известно вам об этих фигурах, дополним ваши знания о них и приведём их в систему.

§ 1. Отрезки

1.1. Отрезок

Отрезок — основная геометрическая фигура. Из отрезков мы будем конструировать другие геометрические фигуры подобно тому, как, например, фермы моста или ажурные башни скрепляются из металлических балок (см. фотографию). Моделями отрезков мы можем считать карандаши и спицы, столбы и колонны, рельсы и брёвна и вообще все вытянутые прямолинейные предметы, если нас интересует только их протяжённость.



Каждые две точки соединяет отрезок, и притом только один.

Отрезок, соединяющий две точки A и B, будем обозначать AB или BA (рис. 13, а). Точки A и B называются **концами** отрезка AB. Отрезки можно обозначать и одной строчной латинской буквой: a, b, c, ... Отрезки проводят по линейке (рис. 13, б) или вдоль натянутой верёвки (вспомните о египетских «верёвковязателях») (рис. 14 на с. 16).

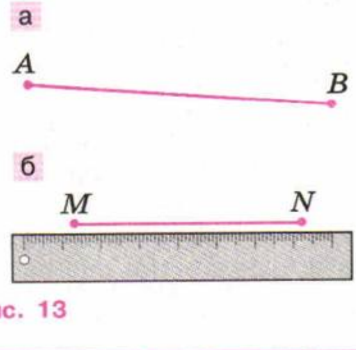


Рис. 13

О точках отрезка, не являющихся его концами, говорят, что они лежат внутри отрезка или что они являются **внутренними** точками

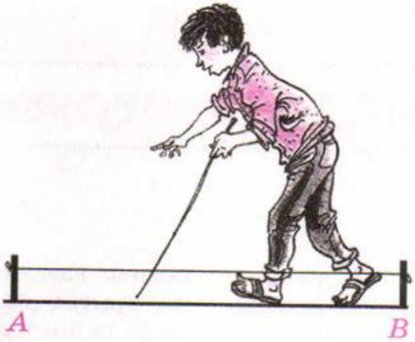


Рис. 14

Рис. 15

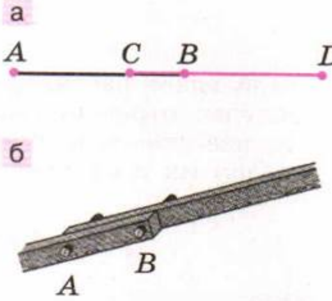


Рис. 16

отрезка. Например, точка C на рисунке 15 лежит внутри отрезка AB. В этом случае говорят и так: точка C лежит <u>**между точками**</u> A и B. Это же можно сказать иначе: **отрезок AB проходит через точку C.**

Если точка C лежит внутри отрезка AB, то она делит его на отрезки AC и CB, или, как ещё говорят, **разбивает отрезок AB на отрезки AC и CB.** В этом случае отрезок AB является объединением отрезков AC и BC, а точка C — единственная общая точка отрезков AC и CB. Об отрезке AB в этом случае говорят, что он **является продолжением отрезка AC за точку C.**

Если два отрезка, например, AB и CD **имеют две общие точки, то их объединением является отрезок** (рис. 16, а). Практический пример: соединив двумя болтами две рейки, получим более длинную рейку (рис. 16, б).

На практике многие постройки как бы сделаны из отрезков. О фермах мостов мы уже говорили. Ещё два примера — забор из штакетника (рис. 17, а) или спортивные брусья (рис. 17, б). И в геометрии, объединяя отрезки, получают различные фигуры, как плоские, так и пространственные. Представим себе, что у нас есть три равные (одинаковые) рейки (три равных отрезка). Из них можно построить один треугольник (рис. 18). А из шести? Ясно, что

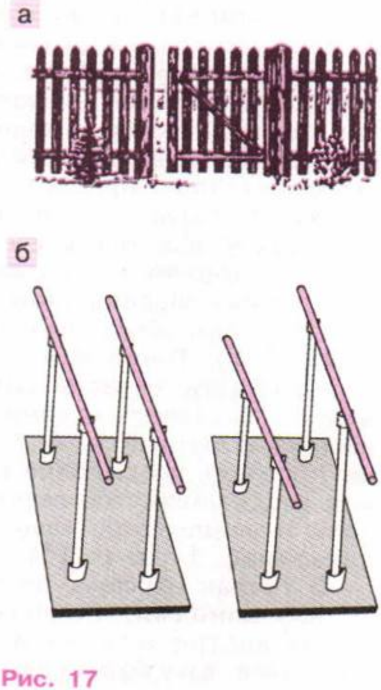


Рис. 17

из шести равных реек можно построить два треугольника. А нельзя ли больше? Подумайте! Оказывается, что можно, но надо расположить их в пространстве так, как изображено на рисунке 19. Ограниченные рейками четыре треугольника — это грани треугольной пирамиды. Короче треугольную пирамиду называют **тетраэдром**. А сколько можно составить треугольников из 12 реек? Подумайте!

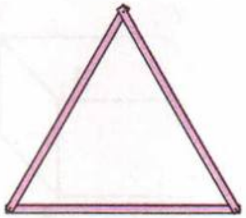


Рис. 18

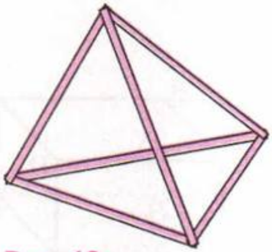


Рис. 19

Вопросы для самоконтроля

1. Как строят отрезки?
2. Приведите примеры конструкций из реальных отрезков.
3. Как сделать модель тетраэдра?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.1. Сколько отрезков с концами в отмеченных точках вы можете насчитать на рисунке 20? Назовите эти отрезки.

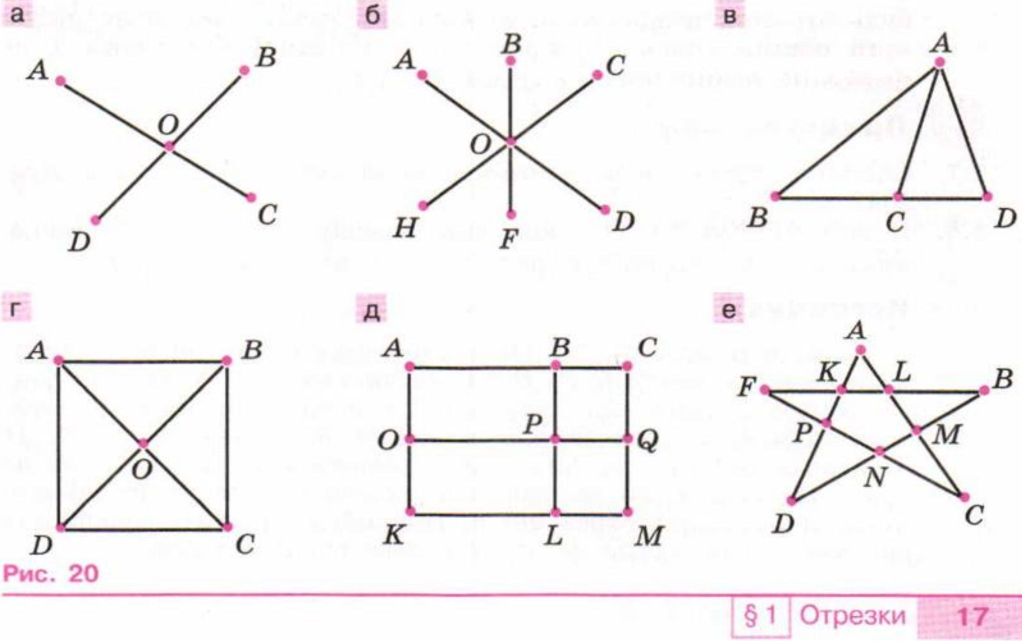


Рис. 20

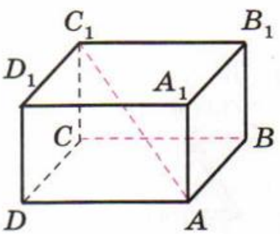


Рис. 21

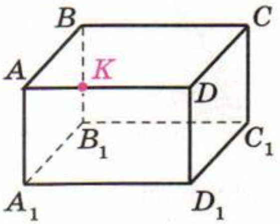


Рис. 22

1.2. На рисунке 21 изображён прямоугольный параллелепипед. С какими из отрезков, изображённых на рисунке, имеет общие точки: а) отрезок BC; б) отрезок AC_1?

1.3. Какие из отрезков, изображённых на рисунке 21, не имеют общих точек: а) с отрезком AC_1; б) с отрезком BC?

1.4. На рисунке 22 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K лежит между точками A и D. Лежит ли она между точками B и B_1?

Рисуем

1.5. Нарисуйте отрезок AB. а) Продолжите его за точку B. Точку, в которой вы остановились, обозначьте буквой C. Сколько отрезков с концами в точках A, B, C на этом рисунке? б) Продолжите теперь отрезок AB за точку A. Точку, в которой вы остановились, обозначьте буквой D. Сколько отрезков с концами A, B, C, D на рисунке теперь? в) Пересечением каких построенных отрезков является отрезок AB? г) Объединением каких построенных отрезков является отрезок CD?

1.6. Нарисуйте куб. Обозначьте его $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, чтобы отрезки CB, CD и CC_1 были невидимыми. Нарисуйте какой-нибудь отрезок, лежащий в: а) видимой грани куба и не имеющий общих точек с ребром CC_1; б) невидимой грани и не имеющий общих точек с отрезком A_1B_1.

Представляем

1.7. Сколько общих точек с поверхностью куба может иметь отрезок?

1.8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены отрезки AC_1 и BD_1. Пересекаются ли эти отрезки? Пересекают ли они отрезок A_1C?

Исследуем

1.9. а) Нарисуйте отрезок AB. Отметьте точку C внутри его. Сколько отрезков с концами A, B и C на рисунке? б) Теперь поставьте на этом отрезке ещё одну точку D и опять подсчитайте число полученных отрезков с концами в точках A, B, C, D. в) Действуйте так же, увеличивая каждый раз число точек на одну. Не видите ли вы закономерности в последовательности числа полученных отрезков? г) Попробуйте решить задачу для общего случая, когда на отрезке поставлено n точек.

1.2. Лучи и прямые

Содержание предыдущего пункта связано с первым постулатом Евклида. Во втором постулате Евклида говорится о возможности продолжения отрезка по прямой (см. Введение, п. 5). Такое построение приходится выполнять, если линейка короткая, а начертить надо длинный отрезок на большом листе бумаги или на классной доске. Если мысленно прямолинейно и неограниченно продолжить отрезок AB за один из его концов B, то получится **луч** AB (рис. 23, а). Вспомните, что слово *луч* мы употребляем, говоря «солнечный луч», «луч прожектора», «луч лазера». Если же мысленно прямолинейно и неограниченно продолжить отрезок AB за оба его конца, то получится **прямая** AB (рис. 23, б).

Эти наглядные представления с помощью знакомых нам терминов можно описать так:

Луч $\boldsymbol{AB}$ — это объединение всех отрезков AM, содержащих точку B (рис. 24, а). Точка A называется *началом луча AB*.

Прямая $\boldsymbol{AB}$ — это объединение всех отрезков MP, содержащих отрезок AB (рис. 24, б).

Всякая прямая задаётся любыми двумя своими точками, а именно **через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна.**

Поэтому две прямые могут иметь не больше чем одну общую точку. Если прямые имеют общую точку, то они называются **пересекающимися прямыми**, а их общая точка называется **точкой пересечения** (рис. 25).

Подобно тому как каждая внутренняя точка отрезка разбивает его на два отрезка, так и каждая *точка, лежащая на прямой, разбивает эту прямую на два луча*. Поэтому лучи называют также **полупрямыми** (рис. 26).

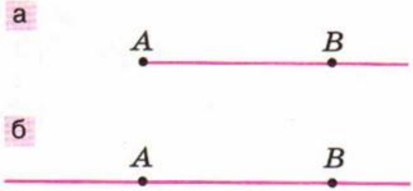


Рис. 23

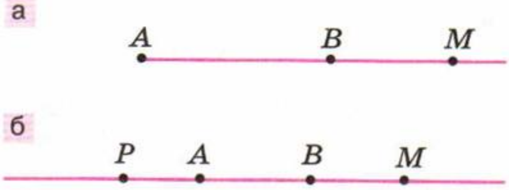


Рис. 24

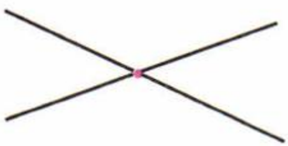


Рис. 25

Рис. 26

Рис. 27

Аналогично каждая прямая, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на две части, которые называются **полуплоскостями** (рис. 27). Для обеих полуплоскостей эта прямая называется их **граничной прямой** или, короче, их **границей**. Граничную прямую относят к каждой из полуплоскостей.

О двух точках, лежащих в одной полуплоскости (но не на граничной прямой), говорят, что они **лежат по одну сторону от её границы** (рис. 28, а). В таком случае отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает границу полуплоскости (рис. 28, б).

О двух точках, лежащих в разных полуплоскостях с общей границей (но не на их границе), говорят, что они **лежат по разные стороны от этой границы** (рис. 29, а). Отрезок, соединяющий эти точки, пересекает общую границу полуплоскостей (рис. 29, б).

Совершенно аналогично каждая плоскость разбивает пространство на два **полупространства** (рис. 30). Наглядное представление об этом даёт стена между двумя комнатами.

Вопросы для самоконтроля

1. Как из отрезка AB получить луч AB?
2. Как из отрезка AB получить прямую AB?
3. Сколько прямых проходит через две заданные точки?
4. Сколько общих точек могут иметь две прямые?

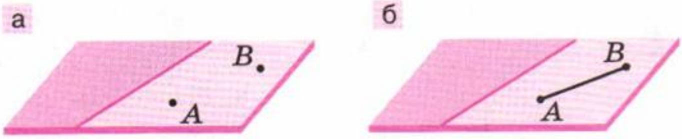


Рис. 28

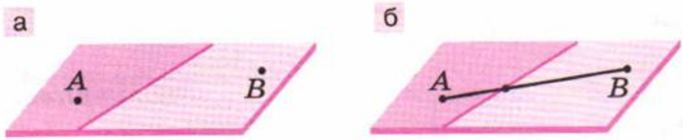


Рис. 29

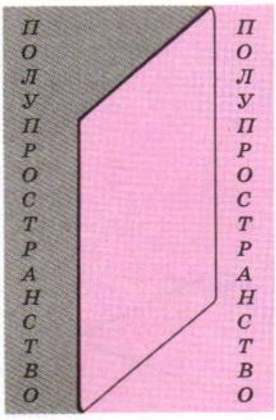


Рис. 30

ЗАДАЧИ

Рисуем

1.10. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте луч AB и луч BA. Какой фигурой является: а) пересечение лучей; б) объединение лучей?

1.11. Нарисуйте отрезок AB и прямую AB. Сколько лучей с началами в точках A и B вы видите на этом рисунке?

Представляем

1.12. Точка C лежит между точками A и B. Сколько лучей с началом в точке C лежит на прямой AB? Назовите эти лучи.

1.13. Три точки A, B, C не лежат на одной прямой. Сколько прямых задаются этими точками? А сколько лучей? Назовите эти прямые и лучи.

1.14. Каждые две из трёх заданных прямых пересекаются. Сколько может быть точек пересечения у этих прямых?

1.15. Нарисуйте отрезок AB и возьмите точку C вне прямой AB. Пусть точка X движется по отрезку AB от одного конца к другому. Какую фигуру образуют все отрезки CX?

Исследуем

1.16. На плоскости заданы четыре точки. Через каждые две из них можно провести прямую. Сколько может быть таких прямых?

1.17. В пространстве заданы четыре точки. Через каждые две из них проводят прямую. Сколько таких прямых может быть? Сравните результат этой задачи с результатом предыдущей.

1.18. а) На плоскости заданы пять точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых задают эти точки? б) А если число точек равно n и никакие три из них не лежат на одной прямой, то сколько прямых будут задавать эти точки? Посчитайте сначала их число для $n = 6$ и $n = 7$.

1.19. Какое наибольшее число точек пересечения может получиться у четырёх прямых: а) лежащих в одной плоскости; б) не лежащих в одной плоскости?

1.3. Сравнение и равенство отрезков

Как сравнивают два реальных отрезка, например две рейки или две доски, хорошо известно: их прикладывают друг к другу, совмещая один конец одного отрезка с концом другого. Если при этом совместились и другие их концы, то рейки (или доски) равны (рис. 31, а). Точно так же вы с другом можете определить, кто выше (рис. 31, б).

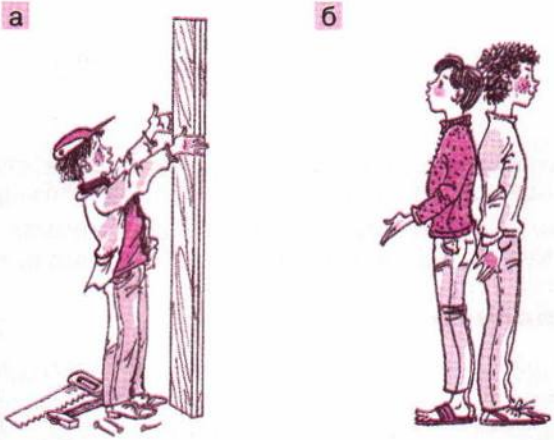


Рис. 31

Но для сравнения двух краёв стола приложить их друг к другу невозможно. Как же поступить в таком случае? Их можно сравнить с третьим предметом, лучше с линейкой, но можно обойтись и бечёвкой и т. п. И если окажется, что оба края стола равны этому третьему предмету, то они будут равны и между собой.

Как сказано в первой аксиоме Евклида, равные одному и тому же равны и между собой. Для отрезков эта аксиома говорит о таком свойстве равенства отрезков:

Аксиома (*сравнения отрезков*). Два отрезка, равные третьему, равны.

Рис. 32

Равенство отрезков AB и CD обозначают так: $AB = CD$. На рисунках равные отрезки отмечаются одинаковым числом поперечных чёрточек (рис. 32).

Как же построить отрезок, равный данному? Если речь идёт о реальных отрезках, например о заготовке досок одной и той же длины, то поступают так. К длинной доске прикладывают доску нужного размера так, чтобы с одной стороны их концы совпадали, а затем с другого конца короткой доски отпиливают доску нужного размера (рис. 33). В геометрии же о возможности построения, аналогичного этой реальной операции, говорится в следующей аксиоме:

Аксиома (*откладывания отрезка*). На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Рис. 33

Подробнее это означает следующее. Если заданы луч l с началом O и некоторый отрезок AB, то на этом луче найдётся такая точка C, что $OC = AB$, и такая точка C лишь одна (рис. 34). Откладывать отрезки, равные заданным отрезкам, мы будем с помощью циркуля (рис. 35).

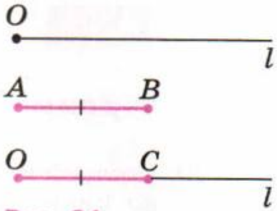


Рис. 34

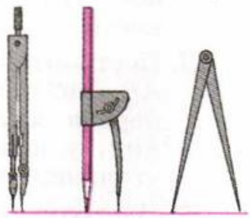


Рис. 35

Откладывая отрезки, мы теперь легко можем сравнить любые два отрезка AB и CD. Для этого отложим на луче AB отрезок AM, равный отрезку CD. Тогда возможны три случая.

Случай 1. Точка M совпадает с точкой B (рис. 36, а). Тогда $AB = AM$ и $AM = CD$, т. е. $AB = CD$.

Случай 2. Точка M лежит внутри отрезка AB, т. е. AM — часть отрезка AB (рис. 36, б). В этом случае отрезок AB больше отрезка AM, так как AM — часть AB. Поэтому **отрезок AB больше отрезка CD**, равного отрезку AM. В таком случае мы пишем: $AB > CD$.

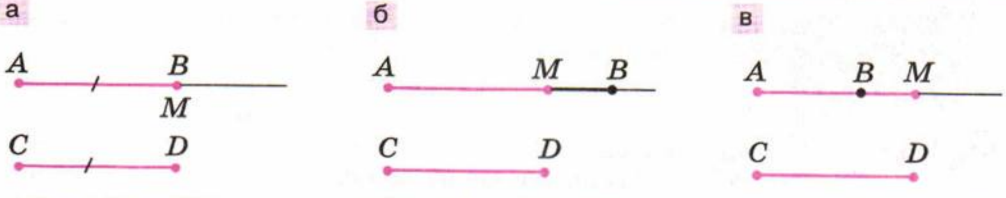
Случай 3. Точка B лежит внутри отрезка AM, т. е. AB — часть отрезка AM (рис. 36, в). В этом случае AB меньше отрезка AM, а значит, **отрезок AB меньше отрезка CD**, равного отрезку AM. В таком случае мы пишем: $AB < CD$.

Ясно, что если отрезок AB меньше отрезка CD, то отрезок CD больше отрезка AB, т. е. если $AB < CD$, то $CD > AB$.

Середина отрезка — это такая точка отрезка, которая делит его пополам, т. е. разбивает его на два равных отрезка. Важно помнить, что при изображении пространственных фигур середина отрезка изображается как середина его изображения.

Вопросы для самоконтроля

1. О чём говорится в аксиоме откладывания отрезка?
2. Как можно сравнить два отрезка?
3. Какая точка называется серединой отрезка?



$AB = AM = CD$ $\qquad$ $AB > AM,\ AM = CD$ $\qquad$ $AB < AM,\ AM = CD$

Рис. 36

ЗАДАЧИ

Строим

1.20. Постройте два отрезка AB и CD. Сравните их, используя только циркуль.

1.21. Постройте отрезок OA. Постройте несколько таких точек X, что $OX = OA$. Какую фигуру образуют все такие точки X на плоскости?

1.22. Постройте отрезок AB. Постройте такой треугольник ABC, что $AB = AC = BC$. (Если вы решили эту задачу, то гордитесь: это первая задача в «Началах» Евклида.) Вы построили треугольник, у которого все стороны равны между собой. Такой треугольник называют **равносторонним**.

1.23. Постройте отрезок AB. На прямой AB постройте такую точку C, чтобы точка B стала серединой отрезка AC.

1.24. Отметьте три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Постройте точку C, такую, что точка O является серединой отрезка AC, а также точку D, такую, что точка O является серединой отрезка BD. Сравните отрезки AB и CD, а также отрезки AD и BC.

Смотрим

1.25. На рисунке 37 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сравните изображения рёбер куба AB, BC, AA_1. Обратите внимание на то, что равные между собой отрезки на рисунке могут быть изображены как равными (например, AB и DC), так и неравными (например, AB и BC).

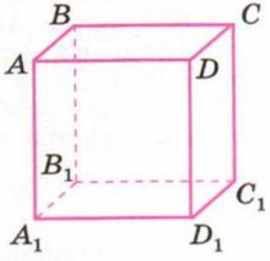


Рис. 37

Представляем

1.26. Нарисуйте луч AB. Какую фигуру образуют на луче AB все точки X, для которых: а) $AX \leqslant AB$; б) $AX \geqslant AB$?

1.27. Нарисуйте прямую AB. Какую фигуру на прямой AB образуют все точки X, для которых: а) $AX \leqslant AB$; б) $AX \geqslant AB$?

1.28. Нарисуйте два отрезка AB и CD так, что $CD < AB$. Какую фигуру на луче AB образуют все такие точки X, что $CD \leqslant AX \leqslant AB$?

1.29. Нарисуйте отрезок AB и отметьте на нём точку C. Какую фигуру на прямой AB образуют все такие точки X, что $AC \leqslant AX \leqslant AB$?

1.30. Отметьте две точки A и B. Проведите прямую AB. Укажите на прямой AB такую точку X, что $AX \leqslant BX$. Какую фигуру образуют на прямой AB все такие точки X?

1.31. Представьте себе куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отрезки AB, AC и AC_1. Какой из этих трёх отрезков самый короткий? самый длинный? Запишите неравенство, связывающее эти отрезки.

Исследуем

1.32. Может ли быть у прямоугольного параллелепипеда только 3 равных ребра (4, 5, 6, ..., 13 равных рёбер)?

1.4. Действия с отрезками

Умея откладывать отрезок, равный данному отрезку, мы можем теперь определить для отрезков «арифметические операции». Начнём со сложения отрезков.

На практике постоянно приходится «складывать отрезки», например, когда кладут рельсы, сваривают трубы и т. п. (рис. 38). Такие реальные «отрезки» последовательно прикладывают друг к другу, составляя один «отрезок». И в теории отрезки складывают так же, последовательно откладывая на одном луче (рис. 39, а).

При сложении отрезков применяют те же термины, что и при сложении чисел («слагаемые», «сумма»), и те же обозначения: например, $c = a + b$, $AC = AB + BC$ (рис. 39, б).

Часто приходится складывать равные отрезки. Например, если отрезок b равен сумме трёх равных между собой отрезков a ($b = a + a + a$), то пишут $b = 3a$ (рис. 40).

Отрезки, как и числа, можно вычитать (рис. 41).

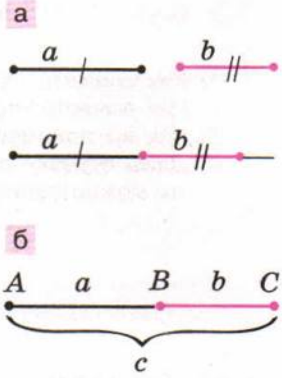


Рис. 39

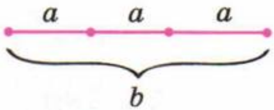


Рис. 40

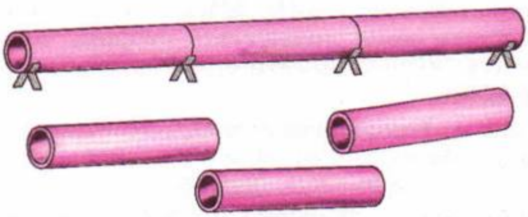


Рис. 38

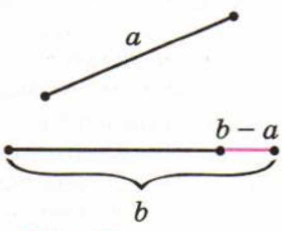


Рис. 41

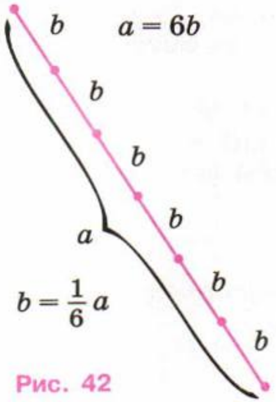


Рис. 42

Конечно, для того чтобы из отрезка b можно было вычесть отрезок a, надо, чтобы отрезок a можно было отложить на отрезке b, т. е. чтобы отрезок a был меньше отрезка b.

Наконец, отрезки можно делить на равные части. Например, середина отрезка делит его на две равные части, а, скажем, линейка с делениями длиной 30 см разделена на 30 равных частей, по 1 см каждый.

Если отрезок a складывается из n отрезков, равных отрезку b, то мы пишем $a = nb$ или $b = \frac{1}{n}a$ (рис. 42).

Вопросы для самоконтроля

1. Как сложить два отрезка?
2. Как вычесть отрезок из отрезка? Всегда ли это можно сделать?
3. Как вы понимаете фразу: «Отрезок умножили на натуральное число»?
4. Даны отрезки a и b. Как понимать такие равенства: $a = 3b$, $a = 0{,}5b$? Как их можно записать иначе?

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Смотрим

1.33. Какие из отрезков на рисунке 43 с концами в обозначенных точках можно выразить как сумму двух других отрезков? А какие из них вы можете выразить как разность?

Строим

1.34. Постройте два отрезка. Постройте их сумму и разность.

1.35. Постройте произвольный треугольник. Убедитесь, что каждая его сторона меньше суммы двух других его сторон, но больше их разности. Попробуйте, выполняя это сравнение, сделать как можно меньше построений.

1.36. Отметьте две точки O и A. Проведите луч OA. Постройте на луче OA последовательно такие точки B, C, D, чтобы выполнялись равенства $OA = AB = BC = CD$. Укажите, какие отрезки с концами в точках O, A, B, C, D равны. Серединами каких из этих отрезков являются точки A, B, C?

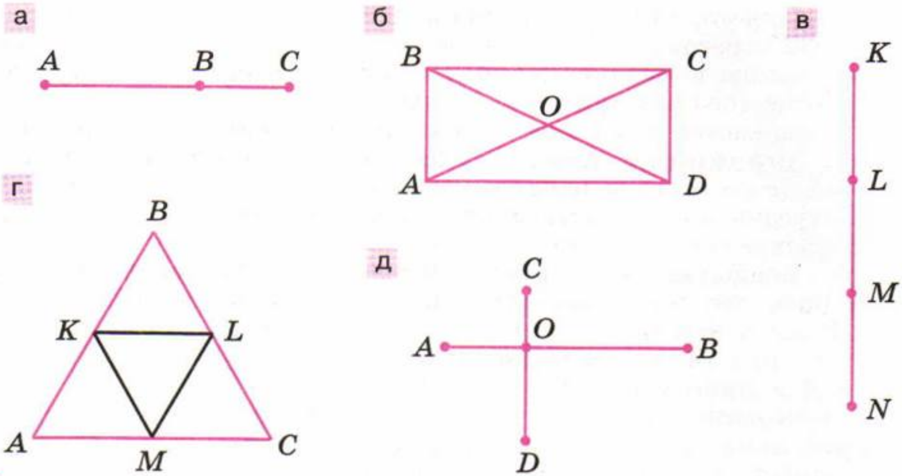


Рис. 43

Доказываем

1.37. Нарисуйте отрезок AB. а) Отложите на нём два равных отрезка AC и BD. Докажите, что $AD = BC$. б) Отложите на прямой AB вне отрезка AB два равных отрезка AC и BD. Докажите, что $AD = BC$.

Исследуем

1.38. Нарисуйте треугольник ABC. Продолжите его сторону AB за вершину B до точек M и P так, чтобы $AM = 2AB$ и $AP = 3AB$, а сторону AC продолжите за вершину C до точек N и Q так, чтобы $AN = 2AC$ и $AQ = 3AC$. Сравните отрезки MN и BC, а также отрезки PQ и BC. Что вы обнаружили? Какие предположения у вас появились?

1.5. Измерение длины отрезка. Расстояние между точками

Длина отрезка — первая и важнейшая из геометрических величин. Она характеризует протяжённость отрезка. Измерять длину постоянно приходится на практике. Например, пока человек растёт, часто измеряют его рост. Через длины выражаются другие геометрические величины: площади, объёмы, меры углов. Например, зная длины сторон прямоугольника, можно вычислить его площадь, а зная длину ребра куба, найти его объём.

Измеряя длину отрезка, опираются на два её основных свойства.

СВОЙСТВО 1 Длины равных отрезков равны.

СВОЙСТВО 2 При сложении отрезков их длины складываются.

Вы знаете, что для измерения длины сначала надо выбрать единичный отрезок, например 1 см, 1 км, 1 дм и т. д. За основную единицу длины в физике, технике и в обыденной жизни принят *метр*.

После того как выбран единичный отрезок, длина каждого отрезка выражается положительным числом. Оно называется **численным значением длины**. Это число является результатом измерения этого отрезка единичным отрезком. Численное значение длины отрезка показывает, сколько раз единичный отрезок и его доля укладываются в данном отрезке. Например, если отрезок длиной 1 см укладывается в отрезке AB шесть раз, то пишем $AB = 6$ см и говорим, что численное значение длины отрезка AB равно шести. Если же в отрезке AB 1 см уложился 6 раз и его десятая доля — 4 раза, то в таком случае численное значение длины отрезка AB равно 6,4 и пишут $AB = 6{,}4$ см.

Если единичный отрезок не имеет названия, а длина отрезка AB равна, например, шести единицам, то пишем $AB = 6$ ед. или, даже сокращая эту запись, что $AB = 6$. Именно это мы и подразумевали, когда говорили о «египетском треугольнике» со сторонами 3, 4, 5.

Длину отрезка называют также *расстоянием* между его концами. Другими словами: **расстояние между точками — это длина соединяющего их отрезка**.

При замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица длины меньше (больше) старой. Например, если $AB = 6{,}4$ см, то $AB = 64$ мм.

Согласно первому свойству длины равных отрезков равны. Верно и обратное утверждение: *отрезки, имеющие равные длины, равны*. Обосновать это можно так.

★ □ Допустим, что длины отрезков AB и CD равны, но сами эти отрезки не равны. Тогда один из этих отрезков больше другого. Пусть $AB > CD$. Тогда отложим на луче AB отрезок $AK = CD$ (рис. 44). Точка K разобьёт отрезок AB на два отрезка AK и KB. Сумма их длин равна длине отрезка AB (по свойству 2). Но длина AK равна длине CD, а длина KB положительна. Поэтому получается, что длина AB больше длины CD, но это не так: их длины равны. Значит, и сами отрезки AB и CD неравными быть не могут, т. е. $AB = CD$. ■ ★

К Комментарий. Интересно узнать об истории возникновения мер длины. Оказывается, не всегда (и не во всех странах до сих пор) люди пользовались принятой сейчас у нас системой мер.

Первыми «счётными приборами» для измерения длин служили ладонь, сустав пальца, локоть и т. п., а также размах рук, шаг. Это было неудобно, так как затрудняло торговлю и другие отношения людей. Постепенно каждое

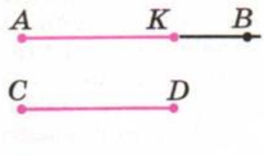


Рис. 44

государство установило для своих нужд общие меры (так, например, в Англии — ярд, фут, дюйм; в России — миля, верста, сажень и др.). И лишь в 1795 г. во Франции был утверждён закон о новых мерах, которым был установлен в качестве единицы длины метр. Такая система мер была названа метрической. Постепенно большинство государств приняло эту систему для себя как обязательную.

Предлагаем небольшую справку о старинных русских и английских мерах длины.

Старинные русские меры длины	Английские меры длины
1 миля = 7 верстам	1 ярд = 3 футам
1 верста = 500 саженям	1 фут = 12 дюймам
1 сажень = 3 аршинам	1 дюйм = 10 линиям
1 аршин = 16 вершкам	1 линия = 10 точкам

Пётр I установил соотношение между русскими и английскими мерами «лучшего ради согласия с европейскими народами в трактатах и контактах»: 1 сажень = 7 футам.

Чтобы вы смогли выразить эти меры длины в метрах, укажем, что 1 сажень $\approx$ 2,13 метра.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства длины отрезка используют при измерении длин отрезков?
2. Какие вы знаете единицы измерения длин?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1.39. **Периметром многоугольника** называется сумма длин всех его сторон. Чему равняется периметр треугольника, у которого: а) длины сторон равны a, b, c; б) длины двух сторон равны a, а длина третьей стороны — b (треугольник, имеющий две равные стороны, называется **равнобедренным**); в) длины сторон равны a (т. е. равносторонний треугольник)?

1.40. Чему равен периметр: а) квадрата со стороной a; б) прямоугольника со сторонами a и b?

Рисуем

1.41. Отметьте такие точки A и B, что $AB = 6$ см. Нарисуйте на прямой AB фигуру, состоящую из всех точек X, таких, что: а) $AX \leqslant 6$ см, $BX \geqslant 6$ см; б) $AX \geqslant 6$ см, $BX \geqslant 6$ см.

Строим

1.42. Постройте прямую. Отметьте на ней точку A. а) Постройте на этой прямой такую точку, которая удалена от точки A на 2 см. Сколько вы получили таких точек? б) Нарисуйте на этой прямой фигуру, которая состоит из всех таких точек X, что: 1) $AX \leqslant 2$ см; 2) $AX \geqslant 3$ см; 3) 3 см $\leqslant AX \leqslant 4$ см.

1.43. Постройте прямую и на ней отрезок AB, длина которого равна 4 см. Нарисуйте на этой прямой фигуру, которая состоит из всех таких точек X, что: а) $AX \leqslant 3$ см, $BX \leqslant 3$ см; б) $AX \leqslant 3$ см, $BX \geqslant 3$ см; в) $AX \geqslant 3$ см, $BX \geqslant 3$ см.

Находим величину

1.44. Нарисуйте на одной прямой три равных отрезка AB, BC, CD. Пусть за единицу длины принят отрезок AD. Чему равны длины остальных отрезков с концами в точках A, B, C, D на этой прямой? Чему равны их длины, если за единицу длины будет принят отрезок AC? А если отрезок CD?

1.45. Длина отрезка AB равна 46 мм. Точка C лежит на прямой AB на расстоянии 22 мм от точки A. Чему равно расстояние BC, если: а) точка C лежит внутри отрезка AB; б) точка C лежит вне отрезка AB?

1.46. Длина отрезка a равна 16 мм, длина отрезка b равна 3,2 см.

Чему равны длины таких отрезков: $3a$; $\frac{1}{2}b$; $10a - 3b$?

1.47. Нарисуйте отрезок AB, длина которого равна 12 см. Точка C лежит на прямой AB. Найдите расстояния CA и CB, если $CA = 2CB$ и: а) точка C лежит внутри отрезка AB; б) точка C лежит вне отрезка AB. Постройте точку C для обоих случаев её расположения.

1.48. Два отрезка лежат на одной прямой. а) Пусть их длины 5 см и 6 см; длина их пересечения равна 2 см. Вычислите длину их объединения. б) Пусть их длины те же, а длина их объединения равна 10 см. Вычислите длину их пересечения. в) Пусть длина одного из отрезков равна 4 см, длина их пересечения равна 1 см, а длина их объединения равна 7 см. Вычислите длину второго отрезка.

1.49. Нарисуйте прямую, на ней отрезок AB, точку D — середину AB. Внутри отрезка AB взята точка C. а) Пусть $CA = 10$ см,

$CB = 2$ см. Вычислите расстояние от C до D. б) Пусть $CA = 3$ см, $CD = 1$ см. Вычислите длину CB. в) Решите задачу в общем виде: считая, что $CA = a$, $CB = b$ и $CD = d$, напишите формулу, связывающую a, b и d.

1.50. Пусть отрезок AB длины a разбит точкой C на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

1.51. Сумма длин двух любых сторон треугольника равна 10 см. Вычислите его периметр и длины его сторон.

Работаем с формулой

1.52. а) Чему равен периметр p квадрата со стороной a? б) На сколько увеличится его периметр, если длина стороны увеличится на x? в) На сколько уменьшится его периметр, если длина стороны уменьшится на y? г) Что произойдёт с его периметром, если длину стороны умножить на число $k > 0$? д) В каких границах находится его периметр, если длина стороны больше 1 м, но меньше 2 м? е) Пусть его периметр изменился на величину q. Как изменились стороны квадрата? ж) Пусть его периметр увеличился в пять раз. Что произошло со стороной?

Планируем

1.53. На прямой расположены три точки. Известны два расстояния между ними. Как найти третье?

1.54. Известна длина отрезка. Внутри его взята некоторая точка. Как найти длину его частей, если к тому же известны: а) отношения длин этих частей; б) разность длин этих частей? Приведите численные примеры. Что изменится, если точка дана вне отрезка?

Применяем геометрию

1.55. Измерьте длину своего шага, своей ступни, расстояние между кончиками пальцев вытянутых рук, длину большого пальца от нижнего сустава до конца, длину ногтя на мизинце. Вам эти сведения могут пригодиться.

1.56. а) На прямом участке изгороди длиной 20 м через каждый метр врыт столбик. Сколько врыто столбиков? Каково расстояние между первым столбиком от начала и пятым столбиком от конца? десятым от начала и десятым от конца? б) Сколько понадобится столбиков для изгороди прямоугольного участка размером 100×50 м^2, если ставить столбик через метр друг от друга?

1.57. а) Возьмите толстую книгу и измерьте её толщину (без переплёта). Вычислите толщину одного листа в этой книге. б) Аналогичным способом вычислите толщину тетрадного листа.

Исследуем

1.58. Из куска проволоки длиной 80 см делают каркас четырёхугольной пирамиды с равными боковыми рёбрами, в основании которой — квадрат. Может ли сторона квадрата иметь длину 5 см? 10 см? 15 см? Попробуйте обобщить свои наблюдения.

Справка словесника. Слово *периметр* состоит из двух греческих слов: *пери* (вокруг) и *метр* (измеряю). Сравните его со словами: *перископ* (*skopeo* — смотрю), *периферия* (*phero* — ношу), *перикардия* (*kardia* — сердце; околосердечная сумка), *период* (*hodos* — путь, дорога).

1.6. Понятие о равенстве фигур. Равенство треугольников

Говоря о равенстве двух плоских фигур, часто рассуждают так: попробуем наложить одну из этих фигур на другую, и если удастся сделать так, что фигуры совместятся, то они равны. Так об этом в «Началах» говорил и Евклид: «И совмещающиеся друг с другом равны между собой» (аксиома 7).

Но как реально совместить два предмета, например два деревянных бруска (или два кирпича) или хотя бы две грани одного бруска (рис. 45)? Можно сделать так: сравнить (скажем, бечёвкой) рёбра этих брусков и, кроме того, диагонали их граней. Если в результате такого сравнения окажутся равными соответствующие отрезки, то мы будем считать (и вполне обоснованно, как мы позднее убедимся), что эти бруски (или их грани) равны.

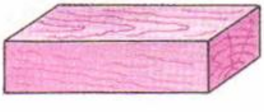


Рис. 45

Тем самым вопрос о равенстве двух реальных предметов сводится к равенству соответственных отрезков — тех отрезков, которые соединяют «определяющие» точки этих предметов.

Для треугольника «определяющие» точки — это его вершины, и потому равенство двух треугольников определяется равенством отрезков, их соединяющих, т. е. сторон. Поэтому мы формулируем такое определение:

Определение. Два **треугольника** называются **равными**, если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника (рис. 46).

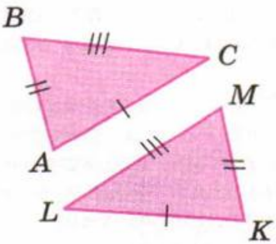


Рис. 46

Когда мы говорим о том, что стороны треугольников *соответственно равны*, то имеем в виду, что трём сторонам одного треугольника так сопоставлены три стороны другого треугольника, что сопоставленные стороны равны друг другу. Тем самым окажутся сопоставленными как стороны треугольника, так и его вершины. Например, в треугольниках ABC и KLM на рисунке 46 равными являются стороны AC и KL, AB и KM, BC и LM. Поэтому вершине A треугольника ABC сопоставлена вершина K треугольника KLM, вершине B — вершина M и вершине C — вершина L.

Обычно, однако, бывает наоборот: сначала сопоставляют вершины треугольников, после чего устанавливается соответствие между их сторонами. Часто для удобства обозначают сопоставляемые стороны одними и теми же буквами, различая их дополнительными значками. Например, мы говорим: «Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$» — и пишем $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, имея в виду, что вершины сопоставлены так: A—A_1, B—B_1, C—C_1 (рис. 47).

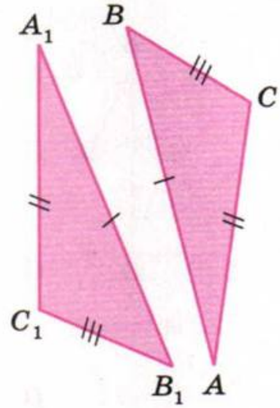


Рис. 47

Вопросы для самоконтроля

1. Как можно установить равенство двух фигур?
2. Какие треугольники называют равными?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.59. Найдите равные треугольники на рисунке 48 на с. 34, а также соответствующие стороны этих треугольников. Запишите, какие треугольники и стороны оказались равными.

1.60. Найдите равные грани тетраэдра на рисунке 49 на с. 34. Запишите, какие грани равны.

Строим

1.61. Постройте треугольник ABC. Постройте треугольник ABD, равный треугольнику ABC. Сколько таких треугольников вы можете построить?

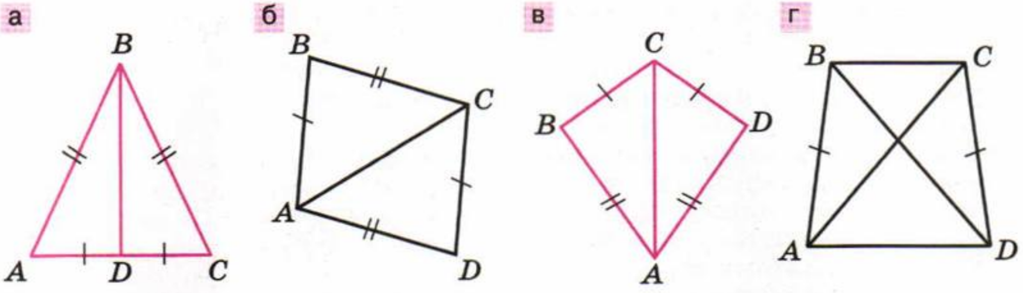


Рис. 48

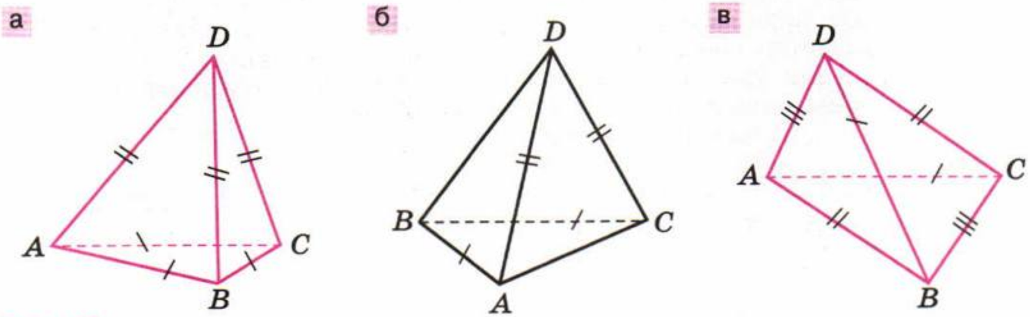


Рис. 49

Рисуем

1.62. Нарисуйте куб и по одной диагонали в двух его смежных гранях. Сколько равных треугольников изображено на рисунке?

1.63. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Зная, что у куба равны все рёбра, а также равны диагонали всех граней, укажите равные треугольники, имеющие вершины в вершинах куба.

Исследуем

1.64. Как бы вы определили равенство двух четырёхугольников? Как вы думаете, считать ли равными два четырёхугольника, у которых соответственные стороны равны?

1.65. Известно, что основание треугольной пирамиды — равнобедренный треугольник и равны между собой все боковые рёбра пирамиды. Есть ли у неё равные грани? Если да, то сколько?

1.66. Нарисуйте тетраэдр $ABCD$. Считая, что у него есть две равные грани, отметьте, какие могут быть у него равные рёбра.

1.67. Среди рёбер тетраэдра есть неравные. Могут ли в этом тетраэдре все грани быть равными?

§ 2. Окружность и круг. Сфера и шар

2.1. Определения окружности и круга

В первом параграфе мы изучали «геометрию прямой». В этом параграфе мы начнём знакомство с важнейшими «круглыми» геометрическими фигурами — окружностью и кругом, сферой и шаром, а также их частями. Даже в короткой фразе футбольного комментатора: «Мяч в центральном круге» — говорится именно о них. Приведите ещё примеры реальных предметов, имеющих форму круга или шара.

Как дать определение окружности, подсказывает способ её построения с помощью циркуля: все точки окружности, которую чертит грифель циркуля, одинаково удалены от её центра — той точки, в которую воткнуто остриё циркуля. Расстояние между концами ножек циркуля — это радиус окружности.
Итак, мы даём такое определение:

Определение. **Окружностью** с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удалённых от точки O этой плоскости на расстояние R (рис. 50).

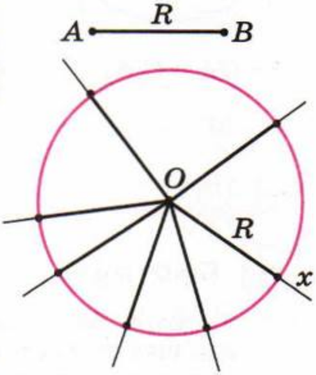


Рис. 50

Можно дать и такое определение: *окружность — это фигура на плоскости, состоящая из всех точек плоскости, которые удалены от данной точки на заданное расстояние.* Данную точку называют *центром окружности*, а заданное расстояние — её *радиусом*.

Радиусом окружности называют не только расстояние от точек окружности до её центра, но и любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности. Все эти отрезки — радиусы одной окружности — равны между собой.

Круг — это фигура на плоскости, ограниченная окружностью. Каждая точка внутри круга удалена от центра ограничивающей его окружности меньше чем на радиус. Поэтому круг можно определить так:

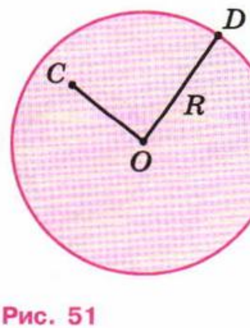


Рис. 51

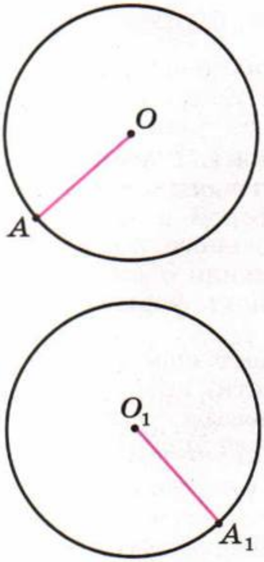
Определение. **Кругом** с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удалённых от точки O не больше чем на расстояние R (рис. 51).

В определении сказано: «...не больше чем на расстояние R»; это означает, что кругу принадлежат все точки, удалённые от точки O на расстояние, меньшее R, а также все точки, удалённые от точки O на расстояние R, т. е. точки окружности.

Центр и радиус круга — это центр и радиус окружности, которая его ограничивает.

Две окружности (два круга) называем **равными**, если равны их радиусы (рис. 52).

Окружности (круги) называются **концентрическими**, если их центры совпадают, т. е. если они имеют один и тот же центр (рис. 53).



$R = OA = O_1A_1$

Рис. 52

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется окружностью? Как строят окружность?
2. Что такое круг? Что такое центр и радиус круга?
3. Какие окружности (круги) называются равными?
4. Какие окружности называются концентрическими?
5. Какие предметы имеют форму круга или окружности?

ЗАДАЧИ

Смотрим

2.1. Рисунок 54 — это первый рисунок в «Началах» Евклида. Он у вас уже появлялся, когда вы решали задачу 1.22 п. 1.3. На этом рисунке изображены две окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB. Объясните, почему треугольник ABC равносторонний.

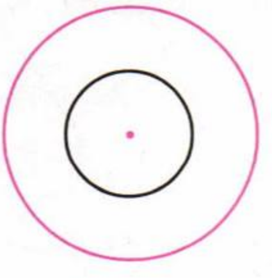


Рис. 53

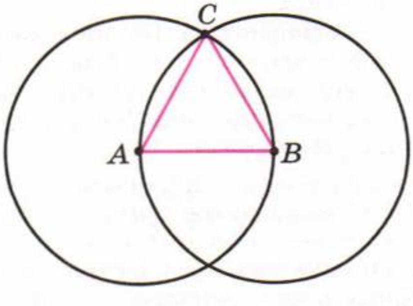


Рис. 54

Рисуем

2.2. Нарисуйте две неравные окружности, не имеющие общих точек. На сколько частей они разбивают плоскость? Какие ещё могут быть случаи расположения двух неравных окружностей? На сколько частей они разобьют плоскость в этих случаях?

2.3. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 2.2 для двух равных окружностей.

Строим

2.4. Воспроизведите рисунок 54 в своей тетради. Постройте третью окружность с центром в точке C и радиусом AC. Почему она проходит через точку B? Какие из отрезков с концами в точках пересечения этих окружностей равны AB? На сколько частей разбивают плоскость три проведённые окружности?

2.5. Нарисуйте треугольник. Постройте равный ему треугольник. Как это сделать проще? А если надо построить три треугольника, равные нарисованному вами, то как действовать в этом случае?

2.6. Постройте треугольник со сторонами 3, 4, 5 см.

Представляем

2.7. На плоскости заданы точка O и отрезок a. Проводят всевозможные отрезки, одним из концов которых является точка O, равные отрезку a. Какую фигуру заполнят эти отрезки?

2.8. Нарисуйте окружность. а) Какую фигуру образуют середины всех её радиусов? б) Какую фигуру заполнят концы X всех отрезков OX, середины которых лежат на данной окружности?

2.9. Представьте себе две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Какие это окружности?

2.10. Отметьте две точки. Постройте какую-нибудь окружность, проходящую через эти точки, затем ещё несколько таких окружностей. Что вы заметили в расположении центров этих окружностей?

2.11. Есть ли среди окружностей, проходящих через две заданные точки A и B, окружность наименьшего радиуса? А наибольшего радиуса?

Дополняем теорию

2.12. Назовём **кольцом** часть плоскости между двумя концентрическими окружностями. Как ещё можно определить кольцо? Что бы вы назвали **шириной кольца**?

Планируем

2.13. Даны такие точки A и B, что $AB = 5$ см. Как построить такую точку X, что $XA = 3$ см, $XB = 4$ см?

Применяем геометрию

2.14. Один круг катится по другому. По какой линии движется центр катящегося круга?

2.15. Можно ли нарисовать окружность на листе бумаги, держа обе ножки циркуля неподвижно?

Рис. 55

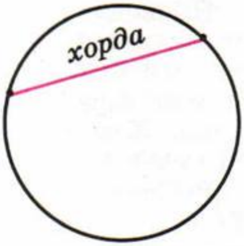


Рис. 56

2.2. Части окружности и круга

«Геометрия круга» богаче «геометрии прямой». У круга и окружности много разнообразных частей. Познакомимся с ними.

Дуга. Если на окружности взять две точки, то они разобьют окружность на две части (рис. 55). Каждая из них называется **дугой окружности**, а данные точки — концами этих дуг.

Хорда. **Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется** **хордой окружности**, а также хордой ограниченного ею круга (рис. 56). О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что она *стягивает* эту дугу.

Слово *хорда* мы будем употреблять не только для окружностей, но и для произвольных фигур. **Хордой фигуры** F мы будем называть отрезок, соединяющий две граничные точки этой фигуры и не лежащий на её границе (рис. 57, а, б). Так, отрезок KM на рисунке 57, б — это хорда треугольника ABC. А точку M будем называть **граничной точкой** плоской фигуры F, если любой круг с центром в

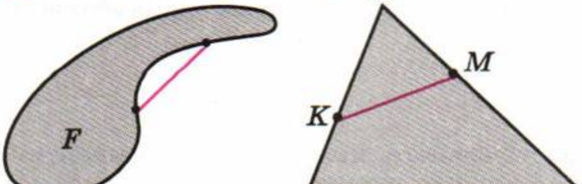


Рис. 57

Рис. 58

точке M содержит как точки фигуры F, так и не принадлежащие ей точки.

Диаметр. Хорда, проходящая через центр окружности (круга), называется **диаметром окружности (круга)** (рис. 58). Диаметр разбивает круг на два **полукруга**, а его концы разбивают окружность на две **полуокружности**.

Центр окружности разбивает её диаметр на два радиуса. Поэтому диаметр равен двум радиусам, а радиус равен половине диаметра. Диаметром (как и радиусом) называют не только сам отрезок, но и его длину.

Сектор. Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется **сектором (круга)** (рис. 59).

Сегмент. Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется **сегментом (круга)** (рис. 60).

А теперь, как и в начале этой главы, вспомним о футбольном поле и посмотрим на его план (рис. 61). Назовите известные вам фигуры на этом плане.

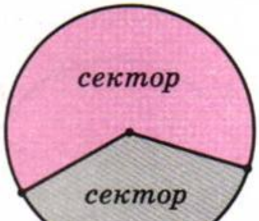


Рис. 59

Рис. 60

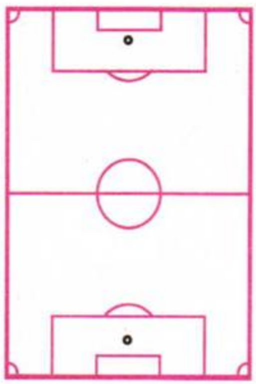


Рис. 61

Справка словесника. *Хорда* в переводе с греческого — струна. Происхождение этого термина в геометрии связано с изготовлением лука, в котором туго натянутая струна-тетива стягивает концы лука. Вспомните, что слово *хорда* встречалось вам и в зоологии.

Диаметр. В этом слове обратите внимание на приставку *диа-* (что означает *насквозь*) и сравните слово *диаметр* со словами: *диа*фильм, *диа*позитив (их демонстрация возможна, если сквозь них проходит свет от лампы *диа*проектора или *диа*скопа), *диа*фрагма (отверстие, пропускающее свет или воздух), *диа*лект, *диа*лог. Нам уже встречалось слово *диа*гональ — отрезок, идущий сквозь многоугольник от одной его вершины до другой.

Слова *сектор* и *сегмент*, оказывается, родственные, так как они происходят от одного и того же латинского слова (как и слово *секира*), которое переводится на русский язык как *рассекать.* В жизни с этими словами вы, конечно, встречались. Например, на стадионе (сектор номер...) или на уроке при изучении зоологии (тело многих членистоногих, например сороконожек, состоит из сегментов).

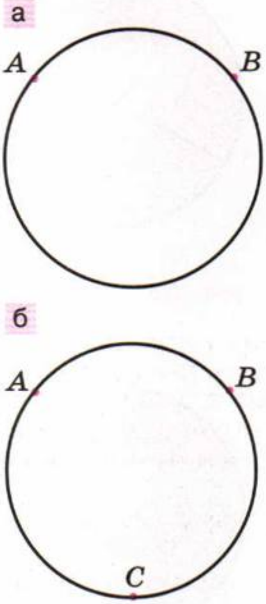


Рис. 62

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется хордой круга?
2. Что называется диаметром круга?
3. Что называется дугой окружности?
4. Какая зависимость есть между радиусом круга и его диаметром?
5. На сколько частей разбивают круг два радиуса? Как они называются?
6. На сколько частей разбивает круг его хорда? Как они называются?

ЗАДАЧИ

Смотрим

2.16. Сколько дуг с концами в отмеченных точках вы можете насчитать на рисунке 62?

2.17. Какие части круга вы видите на рисунке 63?

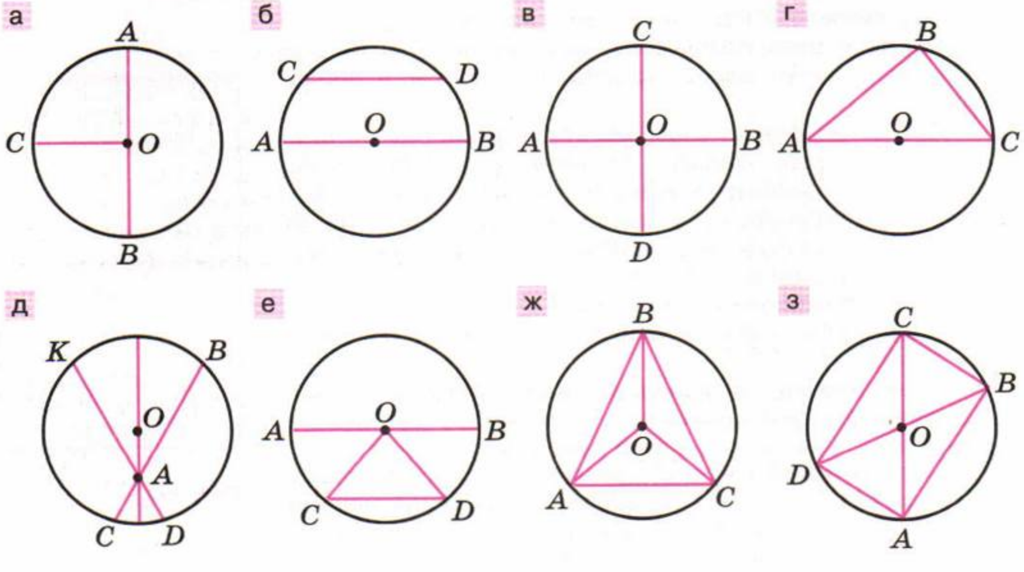


Рис. 63

Рисуем

2.18. Нарисуйте квадрат $ABCD$ и фигуру, состоящую из всех точек, удалённых от точек A и C не больше чем на расстояние AB.

2.19. Строя окружности, можно получать красивые розетки. Попробуйте сами построить такую, как на рисунке 64. Придумайте новые.

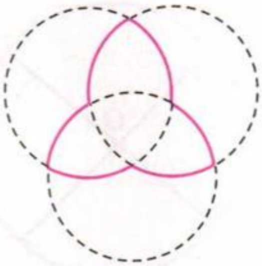


Рис. 64

Представляем

2.20. Сколько общих точек на плоскости могут иметь прямая и окружность? Какой фигурой может быть пересечение прямой и круга? Рассмотрите также и пространственные случаи.

2.21. Какими фигурами могут быть пересечения: а) окружности и полуплоскости; б) круга и полуплоскости? Рассмотрите также и пространственные случаи.

2.22. Какими фигурами могут быть объединения двух полукругов одного круга? Сделайте рисунки.

2.23. Какими фигурами могут быть объединения двух секторов одного круга? Сделайте рисунки.

2.24. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух полукругов одного круга? Сделайте рисунки.

2.25. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух секторов одного круга? Сделайте рисунки.

2.26. Может ли сектор круга быть сегментом этого круга?

2.27. Можно ли одной прямой разбить круг на два сектора?

2.28. Какие из приведённых утверждений верны, а какие нет: а) в круге есть самая длинная хорда; б) в круге есть самая короткая хорда; в) для каждой хорды данного круга найдётся в этом же круге равная ей хорда; г) в каждом круге содержится бесконечно много сегментов этого круга; д) в каждом круге можно найти такой сегмент, который содержит данный сектор этого круга?

Исследуем

2.29. Какие две дуги одной окружности вы назвали бы равными? А какую точку дуги окружности вы назвали бы её серединой?

2.30. На сколько частей могут разбить круг: а) две его хорды; б) три его хорды? Каково наименьшее и наибольшее число частей, на которое могут разбить круг четыре его хорды?

2.31. Постройте окружность радиусом 3 см и выберите на ней точку A. Сколько можно построить хорд AB этой окружности, если: а) $AB = 4$ см; б) $AB = 5$ см; в) $AB = 6$ см; г) $AB = 7$ см?

2.3. Центральная симметрия

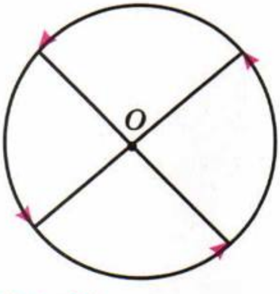


Рис. 65

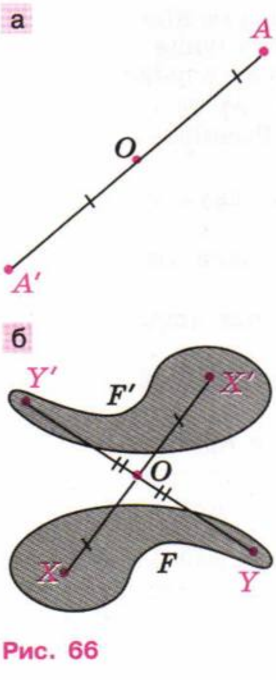


Рис. 66

Изучая различные геометрические фигуры, мы будем знакомиться с их симметричностью.

Греческое слово **симметрия** можно перевести как **соразмерность**.

Фигуры могут обладать различными видами симметрии. Среди других фигур окружность и круг, а также сфера и шар — одни из самых симметричных: они обладают несколькими видами симметрии. Сейчас мы познакомимся с их центральной симметрией, а позже и с осевой и поворотной симметриями. Впрочем, и без подробных объяснений каждый понимает, что при вращении вокруг центра и окружность, и ограниченный ею круг скользят сами по себе, или, как говорят, *самосовмещаются* (рис. 65). А это и означает, что они обладают поворотной симметрией. О центральной симметрии скажем подробнее.

Говорят, что две **точки A и A' симметричны относительно точки O**, если точка O является серединой отрезка AA' (рис. 66, а). Точка O считается симметричной сама себе относительно точки O.

Две **фигуры** называются **симметричными относительно точки O**, если для каждой точки одной фигуры симметричная ей (относительно точки O) точка лежит в другой фигуре и наоборот (рис. 66, б).

Короче можно сказать так: две фигуры симметричны (относительно точки O), если они состоят из симметричных (относительно точки O) точек.

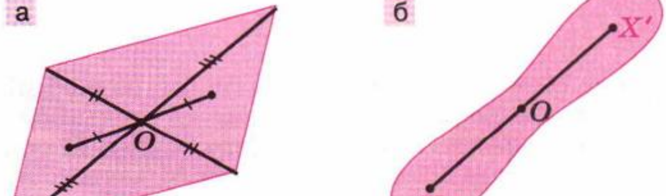


Рис. 67

Рис. 68

В частности, фигура может быть симметричной самой себе относительно некоторой точки O (рис. 67). Это значит, что она состоит из симметричных (относительно O) точек. Точка O называется тогда **центром симметрии фигуры**, а о фигуре говорят, что она обладает **центральной симметрией**.

Окружность симметрична относительно своего центра. В самом деле, возьмём любую точку X, лежащую на окружности S с центром O (рис. 68). Проведём из точки X через точку O диаметр XX_1 окружности S. Центр O — середина диаметра XX_1, т. е. точки X и X_1 симметричны относительно точки O. Следовательно, точка O — центр симметрии окружности S.

Центр круга также является центром его симметрии (рис. 69). С помощью рисунка 69 попробуйте обосновать это утверждение.

Ясно, что любая точка прямой является её центром симметрии (рис. 70, а). Аналогично и любая точка плоскости является её центром симметрии (рис. 70, б).

Треугольник центра симметрии не имеет, а четырёхугольник может его иметь. Такие четырёхугольники называются **параллелограммами** (рис. 71, а). Подробно о параллелограммах мы будем говорить в восьмом классе. Частным случаем параллелограмма является прямоугольник (рис. 71, б): точка пересечения его диагоналей является его центром симметрии.

Вообще заметим, что центр симметрии может быть лишь у многоугольника с чётным числом вершин (подумайте, глядя на рисунок 72, почему).

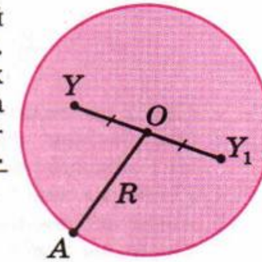


Рис. 69

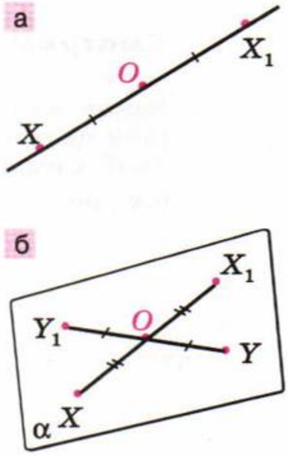


Рис. 70

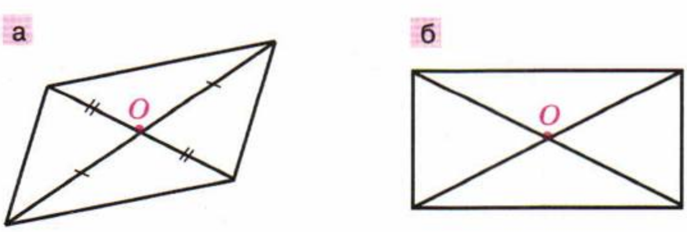


Рис. 71

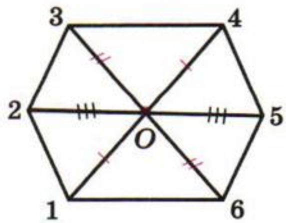


Рис. 72

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете симметричные фигуры?
2. Что означает фраза: «Две точки симметричны относительно третьей»?
3. Что означает фраза: «Фигура имеет центр симметрии»?
4. Какие вы знаете фигуры, имеющие центр симметрии?
5. Какие вы знаете фигуры, не имеющие центра симметрии?
6. Какие вы знаете центрально-симметричные предметы?

ЗАДАЧИ

Смотрим

2.32. Какие из фигур, изображённых на рисунке 73, имеют центр (или центры) симметрии? Где он (они) расположен (расположены)? Симметричны ли точки A_1 и C относительно точки D (см. рис. 73, з)?

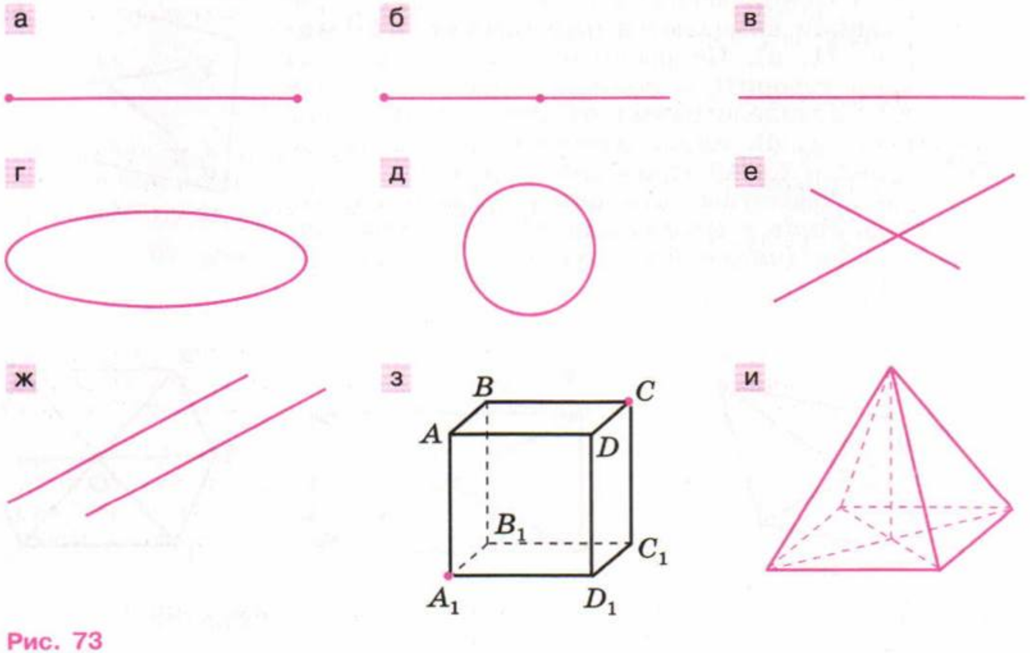


Рис. 73

Строим

2.33. Отметьте некоторую точку O и нарисуйте какой-нибудь многоугольник F (например, треугольник или четырёхугольник). Постройте фигуру F_1, симметричную фигуре F относительно точки O.

Дополняем теорию

2.34. **Диагональю прямоугольного параллелепипеда** называется отрезок, соединяющий две его вершины, не лежащие в одной грани. Используя каркасную модель прямоугольного параллелепипеда, проверьте, что его диагонали пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Эта точка — *центр симметрии* прямоугольного параллелепипеда, или просто *центр* прямоугольного параллелепипеда.

Рисуем

2.35. Нарисуйте: а) несколько фигур, имеющих центр симметрии; б) какую-нибудь фигуру, имеющую два центра симметрии.

2.36. Нарисуйте куб. Обозначьте его. Выпишите: а) пары точек, симметричных друг другу относительно центра симметрии куба; б) пары рёбер, симметричных друг другу относительно центра симметрии куба.

Работаем с моделью

2.37. Используя каркасную модель прямоугольного параллелепипеда, проверьте, что отрезок любой прямой, проходящей через его центр симметрии, с концами на рёбрах параллелепипеда делится центром пополам.

Представляем

2.38. Дан круг и в нём симметричные относительно центра фигуры: а) два радиуса; б) две хорды; в) два сектора; г) два сегмента. Как могут быть расположены эти фигуры в круге? Сделайте рисунки.

2.39. Известно, что две окружности симметричны относительно некоторой точки. Равны ли они? Каким может быть взаимное расположение этих окружностей? Рассмотрите также и пространственный случай.

2.40. Каково взаимное расположение рёбер куба, симметричных друг другу относительно его центра?

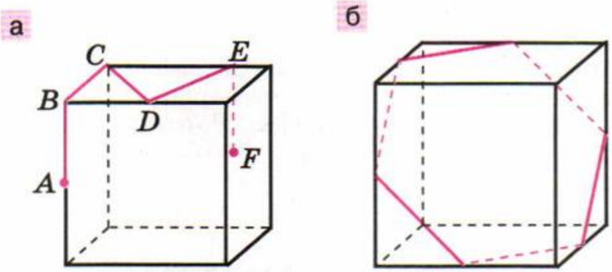


Рис. 74

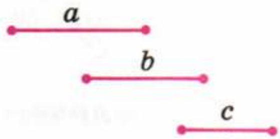


Рис. 75

2.41. На рисунках 74, а, б изображены куб и ломаная, лежащая на его поверхности. Как расположена ломаная, симметричная данной, относительно центра куба? Сделайте рисунок.

2.42. Каково взаимное расположение двух центрально-симметричных: а) прямых; б) плоскостей?

2.4. Построения циркулем и линейкой

В элементарной геометрии, которую изучают в школе, все плоские фигуры состоят из отрезков, окружностей и их дуг или ограничены ими. И для построения таких фигур (если указаны правила их построения) достаточно линейки и циркуля: по линейке проводят отрезки, циркулем чертят окружности. Напомним, что строить фигуры с нужными свойствами — одна из важнейших задач геометрии. Этой задаче в курсе седьмого класса мы уделяем самое большое внимание, а потому этот курс можно было бы назвать курсом «строительной» геометрии.

Ещё Евклид в «Началах» много внимания уделял построениям. В четырёх из пяти его постулатов говорится о построениях.

Первое предложение в «Началах» Евклида, как мы уже говорили, — это решение задачи о построении равностороннего треугольника с заданной стороной. А в предложении 22 Евклид строит треугольник, имеющий своими сторонами заданные отрезки a, b, c (рис. 75). Решим эту задачу и мы.

Решение. Ясно, что один из отрезков, например отрезок a, можно построить в любом месте. Обозначим его концы через B и C (рис. 76, а). Подумаем, как построить точку A. Отрезок AC должен быть равен отрезку b, поэтому точка A лежит на окружности с центром в точке C и радиусом b. Построим эту окружность (рис. 76, б). Поскольку отрезок AB должен быть равен отрезку c, то точка A лежит на окружности с центром в точке B и радиусом c. Построим эту окружность (рис. 76, в) и обозначим через A одну из точек её пересечения с первой окружностью. Треугольник ABC имеет своими сторонами заданные отрезки a, b, c. Задача решена.

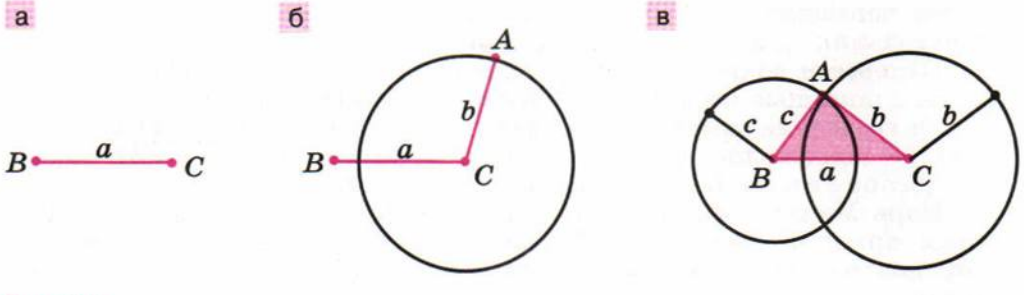


Рис. 76

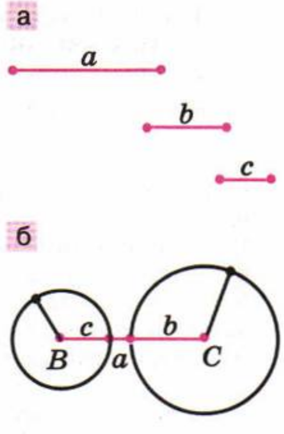


Рис. 77

Давайте обсудим выполненное нами решение задачи. Зададим себе два вопроса.

1. Всегда ли можно построить треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам a, b, c?

2. Сколько решений может иметь задача?

Ответ на первый вопрос ясен: если один из отрезков большой, а два других маленькие, то треугольник с такими сторонами построить нельзя: окружности не пересекутся (рис. 77). Условия, при которых данная задача имеет решение, мы сможем дать в п. 6.2.

Теперь поговорим о количестве решений задачи. Когда мы строили треугольник, то выбрали одну из точек пересечения построенных окружностей. Но могли выбрать и другую. И тогда получился бы ещё один треугольник. Конечно, он оказался бы равным первому (почему?). Мы могли также и в другом месте начать выполнять построение, и тогда получились бы ещё два треугольника. И все они были бы равны между собой (так как имели бы соответственно равные стороны). Математики договорились, что *разными* считаются решения, дающие неравные фигуры (или если и равные, то различно расположенные относительно данной фигуры, с которой связано построение). Таким образом, наша задача если имеет решение, то только одно (или, как говорят, *единственное*).

А теперь выполните такие задания: нарисуйте какой-нибудь треугольник и постройте (циркулем и линейкой) равный ему треугольник.

▲ ***О разрешимости задач на построение.*** Обратим ваше внимание на то, что при построении мы использовали лишь циркуль и линейку. Конечно, выполняя построения, вы будете использовать и другие инструменты, например чертёжный треугольник для построения прямых углов. Но прямой угол строится циркулем и линейкой и без чертёжного треугольника, так что в этом случае чертёжный треугольник применяется лишь для удобства.

Интересен вопрос: любая ли задача на построение может быть решена с помощью циркуля и линейки? Оказывается, нет. Ещё в древности греческие математики сталкивались с такими задачами, которые не поддавались решению. Одна из таких задач — это задача об удвоении куба. Она связана с такой легендой.

Царь Минос велел воздвигнуть памятник сыну Главку. Архитекторы придали памятнику форму куба, ребро которого равнялось 100 локтям. Но Минос нашёл памятник слишком малым и приказал удвоить его объём, сохранив форму куба. Чувствуя своё бессилие, архитекторы обратились за помощью к геометрам, но и те оказались не в силах им помочь.

В настоящее время доказано, что эта задача при помощи циркуля и линейки не решается. В дальнейшем мы встретимся и с другими знаменитыми задачами на построение, которые нельзя решить циркулем и линейкой. ▼

? Вопросы для самоконтроля

1. Какими инструментами пользуются при построении плоских фигур? Почему именно ими? Можно ли пользоваться другими?
2. Какие задачи на построение вы уже решали?
3. Какие вопросы обязательно надо обсуждать, решив задачу на построение?
4. Может ли задача на построение не иметь решения? Приведите пример такой задачи.
5. Может ли задача на построение иметь больше одного решения? Приведите пример такой задачи.
6. Сколько решений имеет задача о построении окружности с заданным центром?
7. Сколько решений имеет задача о построении окружности заданного радиуса?

2.5. Как определяют сферу и шар

К слову *шар* хочется добавить слово *земной*, а к слову *сфера* — *небесная* (рис. 78).

Геометрия здесь смыкается с географией и астрономией. И сферу, и шар в географии вы уже изучали. Вам рассказывали о диаметре и радиусе Земли, об экваторе, о параллелях и меридианах, о полярных кругах и тропических поясах. Давайте разберёмся теперь в этих понятиях с точки зрения геометрии, учитывая, что шар аналогичен кругу, а сфера — окружности.

Сфера и шар определяются почти дословно так же, как окружность и круг. Разница лишь в том, что окружность и круг — фигуры на плоскости, а сфера и шар — в пространстве. Поэтому, определяя сферу и шар, нужно в определениях окружности и круга заменить слово *плоскость* словом *пространство*. Попробуйте сначала это сделать самостоятельно, а затем сравните свои формулировки с теми, которые даны в учебнике.

Определение. **Сферой** с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, удалённых от точки O на расстояние R (рис. 79).

Можно сказать и так: *сфера — это фигура в пространстве, содержащая все точки, которые удалены от данной точки — центра сферы на заданное расстояние — радиус сферы.*

Как и для окружности, **радиус сферы** — это не только расстояние от точек сферы до её центра, но и любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой на сфере. Все эти отрезки — радиусы сферы — равны между собой.

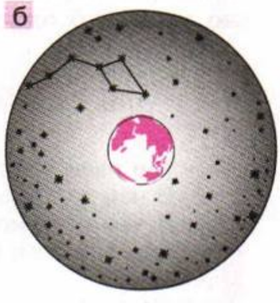
Шар — это пространственная фигура, ограниченная сферой, включая саму сферу. Каждая точка, лежащая внутри шара, удалена от центра ограничивающей его сферы меньше, чем на радиус. Можно так определить шар:

Определение. **Шаром** с центром в точке O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, удалённых от точки O на расстояние, не большее чем R.

Определите самостоятельно **диаметр сферы и** ограниченного ею **шара**. Какие точки сферы вы бы назвали диаметрально противоположными?

▲ ***Об определениях.*** Мы только что сформулировали определения сферы и шара и попросили вас дать определение диаметра сферы. Легко ли вам было дать сразу точную правильную формулировку этого определения? Или это получилось после нескольких неудачных попыток? Не огорчайтесь, если это получилось не сразу. Дать точное определение какого-нибудь понятия обычно бывает трудно. Даже если это понятие вам знакомо и вы его ни с чем не спутаете. Например,

земной шар



небесная сфера

Рис. 78

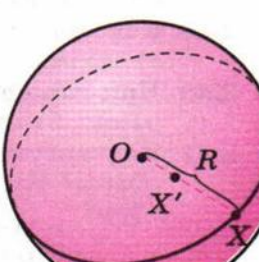


Рис. 79

попробуйте дать определение тому, что называется столом. Трудно? Но ведь никто из вас не спутает стол с табуреткой.

Так зачем же формулируют определения?

Чтобы правильно понимать друг друга, прежде чем что-то обсуждать, надо договориться о точном смысле произносимых нами слов. Так поступают и в других науках, например в грамматике, в физике и др. Чаще всего в определениях присутствует слово *называется*: «Сферой называется фигура...», «Глаголом называется часть речи...» и т. п. Но это необязательно. Например, о сфере можно сказать так: «Сфера — это фигура в пространстве, состоящая из всех точек, удалённых от данной точки на заданное расстояние». Полезно уметь об одном и том же сказать по-разному. ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется сферой и что называется шаром?
2. В чём отличие окружности от сферы? А что у них общего?
3. В чём отличие шара от круга? А что у них общего?
4. Какие предметы имеют форму шара или сферы?

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Представляем

2.43. На сфере нарисована замкнутая линия. Верно ли, что она является окружностью? «Да, — ответил ученик 7 класса, — так как все точки её одинаково удалены от одной — центра сферы». Прав ли он?

2.44. Какими фигурами могут быть пересечения: а) сферы и полуплоскости; б) шара и полуплоскости?

2.45. Как могут быть расположены по отношению друг к другу: а) прямая и шар; б) луч и сфера; в) плоскость и шар?

2.46. При пересечении каких фигур с шаром можно получить: а) отрезок; б) круг; в) точку?

2.47. Как могут быть расположены по отношению друг к другу две сферы? Какие фигуры могут получиться при пересечении двух сфер?

Доказываем

2.48. Докажите, что сфера (и шар) имеет центр симметрии.

2.6. Сферическая геометрия

Из свойств шара и сферы отметим прежде всего такое: если шар пересечь плоскостью, то в сечении получится круг (рис. 80). Окружность этого круга будет сечением сферы данного шара. Рисуют окружности, полученные в сечении сферы плоскостью, в виде *эллипса* — «сжатой» окружности.

Среди всех этих окружностей самый большой радиус у тех, плоскость которых проходит через центр сферы. Их центры находятся в центре сферы (рис. 81). Они называются **большими окружностями** на сфере, и их радиус равен радиусу сферы.

Свойства больших окружностей на сфере во многом аналогичны свойствам прямых на плоскости, т. е. эти свойства похожи. Например, каждая большая окружность разбивает сферу на две **полусферы** (как прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две полуплоскости). А дуги больших окружностей (меньшие полуокружностей) аналогичны по свойствам (похожи) отрезкам прямых (рис. 82). Такими дугами ограничены **сферические треугольники и многоугольники** (рис. 83).

Знакомые вам из географии меридианы — это половины больших окружностей с концами в полюсах (рис. 84). Кроме меридианов, на глобусе рисуют параллели—семейство окружностей (рис. 85). Самая большая параллель — экватор. Его радиус равен радиусу глобуса (или радиусу Земли, если представлять экватор на земной поверхности). Экватор является большой окружностью. Когда параллели приближаются к полюсам, их радиусы уменьшаются. Кроме экватора, из параллелей вы-

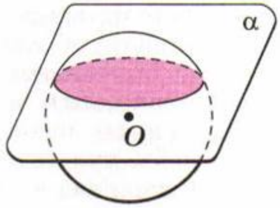


Рис. 80

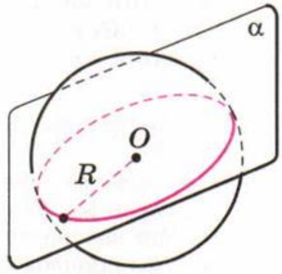


Рис. 81

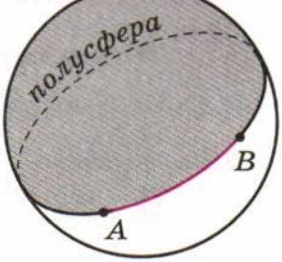


Рис. 82

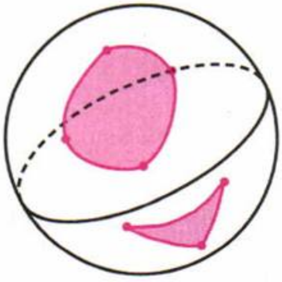


Рис. 83

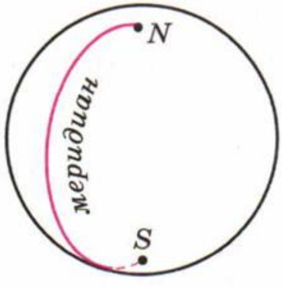


Рис. 84

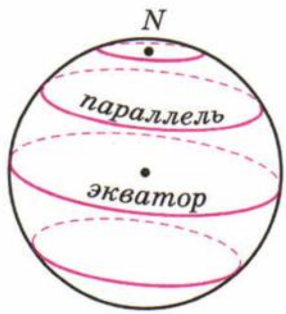


Рис. 85

деляют на земном шаре два тропика — северный и южный, а также два полярных круга (точнее было бы сказать «полярные окружности»). Между тропиками и полярными кругами лежат два умеренных пояса. Теперь мы с вами представляем себе, что такое *пояс на сфере* (рис. 86).

Рис. 86

Сферическая геометрия возникла очень давно, ещё в древнем Вавилоне и Древней Греции. И появилась она в результате астрономических наблюдений за движениями звёзд и планет на небесной сфере — так древние представляли себе небесный свод.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете части шара?
2. Какие вы знаете свойства шара?
3. Что вы знаете о сферической геометрии?
4. Вам предложили сделать шар (сферу) из любого материала и любыми доступными средствами. Как бы вы поступили?

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Представляем

2.49. Сколько окружностей можно провести на сфере через две точки?

2.50. На сфере даны две точки. Проходит ли через них большая окружность? Единственна ли она?

Дополняем теорию

2.51. На сколько частей разбивают сферу две большие окружности (рис. 87)? Части сферы, на которые они разбивают эту сферу, называются <u>**двуугольниками**</u>. Сравните эту ситуацию с аналогичной ситуацией на плоскости.

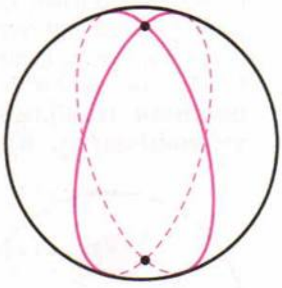


Рис. 87

Исследуем

2.52. На сфере провели три большие окружности. На сколько частей разбилась при этом сфера? Что это за части? Нарисуйте. Сравните свои наблюдения с аналогичной ситуацией на плоскости. Рассмотрите различные случаи расположения окружностей.

§ 3. Углы

3.1. Что называют углом в геометрии. Смежные углы

Ни одна фигура в элементарной геометрии не обладает таким разнообразием видов, как угол (убедитесь в этом, посмотрев в предметном указателе понятия, начинающиеся словами *угол* и *углы*). В разнообразии углов нам и предстоит разобраться в этом параграфе.

Если на плоскости из некоторой точки провести два луча, то они разобьют плоскость на две части — два угла (рис. 88).

Рис. 88

Углом мы будем называть часть плоскости, ограниченную двумя лучами с общим началом. Эти лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**. Стороны угла принадлежат углу.

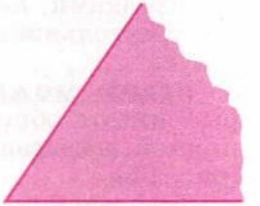


Рис. 89

О точках угла, не лежащих на его сторонах, говорят, что они лежат **внутри угла**, или являются **внутренними**.

В соответствии с определением угол — неограниченная часть плоскости. На практике же, конечно, рассматривают и рисуют лишь части углов, прилежащие к его вершине.

Например, мы не можем нарисовать стороны угла целиком, поэтому рисуем лишь их части (рис. 89). Кроме того, если мы захотим сделать модель угла, то возьмём лист бумаги и вырежем угол (рис. 90, а) или перегнём и сложим этот лист (рис. 90, б).

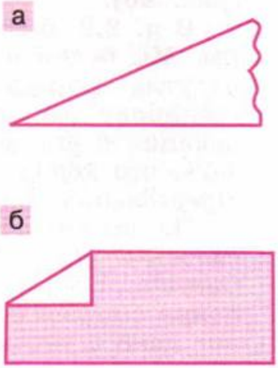


Рис. 90

Углы обозначают и называют по-разному: $\angle ab$, $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle 1$, угол α и т. п. При этом знак $\angle$ заменяет слово *угол*. Когда угол обозначают греческими буквами α, β, γ и т. д., то знак $\angle$ не пишут.

Угол, стороны которого образуют прямую, называется **развёрнутым углом**. Развёрнутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — вершина угла (рис. 91).

Рис. 91

Когда угол ab неразвёрнутый, то возможны два случая.

Случай 1. Угол ab является частью развёрнутого угла (рис. 92), т. е. он меньше развёрнутого. В этом случае угол ab выпуклый: он лежит по одну сторону от прямых, содержащих лучи a и b.

Случай 2. Угол ab содержит развёрнутый угол, т. е. он больше развёрнутого (рис. 93). В этом случае угол ab невыпуклый.

Два луча с общим началом, не лежащие на одной прямой, разбивают плоскость на два угла, один из которых больше развёрнутого — невыпуклый, а другой меньше развёрнутого — выпуклый (рис. 94). Мы пока не будем рассматривать углы, большие развёрнутого. Поэтому, говоря слово *угол*, мы подразумеваем, что это выпуклый угол (в том числе, может быть, и развёрнутый: он тоже выпуклый).

Нам часто придётся говорить и об углах между отрезками, например об углах между сторонами треугольника или между радиусами окружности.

Углом между отрезками OA и OB, которые имеют общий конец и не лежат на одной прямой, называется угол между лучами OA и OB (рис. 95).

Треугольник ABC имеет три угла: угол A между сторонами AB и AC, угол B между сторонами BA и BC и угол C между сторонами CA и CB (рис. 96).

В п. 2.2. было дано определение хорды фигуры. Мы будем в дальнейшем рассматривать хорду угла: **хорда угла** — это отрезок, который соединяет две точки на сторонах угла, не совпадающие с его вершиной (рис. 97). Можно сказать, что *хорда AB угла O отсекает от угла O треугольник AOB*.

На рисунке 98 изображены так называемые *смежные углы*. Попробуйте, только глядя на этот рисунок, сформулировать самостоятельно определение смежных углов и сравните его с тем, какое дано в учебнике.

Рис. 92

Рис. 93

Рис. 94

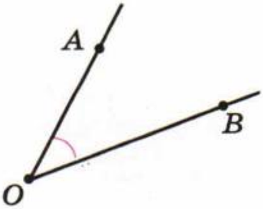


Рис. 95

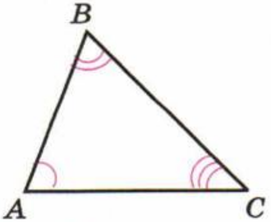


Рис. 96

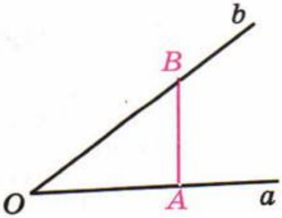


Рис. 97

Определение. **Два угла** называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют прямую.

Ясно, что *объединением двух смежных углов является развёрнутый угол.*

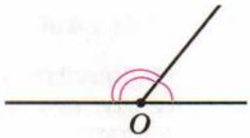


Рис. 98

Замечание. Иногда под углом понимают и фигуру, образованную парой лучей с общим началом. Но для сравнения углов и для действий с ними удобнее понимать угол как часть плоскости, ограниченную парой лучей.

Вопросы для самоконтроля

1. На сколько частей разбивают плоскость два луча с общим началом? Как называются эти части?
2. Какие части углов вы знаете?
3. Какие виды углов вы знаете?
4. Чем отличается выпуклый угол от невыпуклого?
5. Чем отличается развёрнутый угол от других углов?
6. В каких случаях в быту употребляется слово *угол*?

ЗАДАЧИ

Смотрим

3.1. Назовите и запишите углы, которые изображены на рисунке 99.

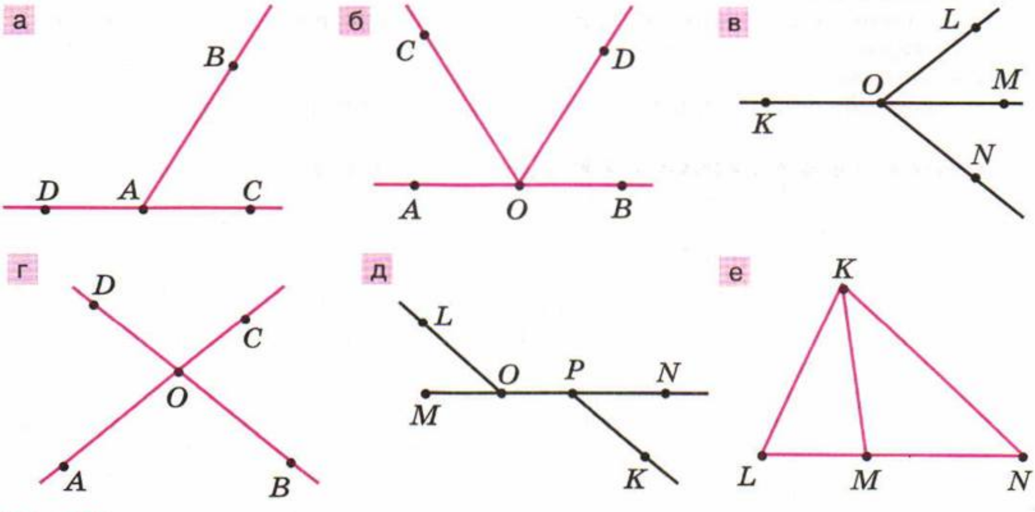


Рис. 99

Рисуем

3.2. Нарисуйте угол. Затем нарисуйте: а) какую-нибудь его хорду; б) две его хорды с общим концом; в) две его пересекающиеся хорды.

3.3. Нарисуйте: а) два угла с общей вершиной; б) два угла с общей стороной; в) два угла, стороны которых лежат на пересекающихся прямых; г) два угла, пересечение которых — отрезок; д) два таких угла, что стороны одного пересекают соответственно стороны другого.

3.4. Нарисуйте два угла так, чтобы: а) их пересечением и объединением были углы; б) только их пересечением был угол; в) только их объединением был угол; г) ни в пересечении, ни в объединении не получился угол.

3.5. Нарисуйте треугольник. Объясните, почему его можно считать пересечением: а) трёх углов, отличных от развёрнутого; б) трёх полуплоскостей; в) двух углов.

3.6. а) Нарисуйте угол, отличный от развёрнутого. Нарисуйте смежные с ним углы. Сколько таких углов?
б) Нарисуйте треугольник и углы, смежные с его углами. На сколько частей разбилась при этом плоскость? Сколько углов, смежных с углами треугольника?

Представляем

3.7. Нарисуйте угол AOB. Пусть точка X движется по его хорде AB от A к B. Какую фигуру при этом заполняют все лучи OX?

3.8. Представьте себе треугольную пирамиду. Сколько у её граней углов? Нарисуйте пирамиду и покажите все углы граней пирамиды на рисунке.

3.9. Сколько углов у граней четырёхугольной пирамиды (см. рис. 3, в)? Нарисуйте пирамиду и покажите все эти углы.

3.2. Равенство углов. Свойство равных углов

В этом параграфе мы строим *геометрию углов*, которая включает в себя, в частности, действия с углами и сравнение углов и которая завершается измерением углов. В основе геометрии углов лежат равенства углов и откладывание угла, равного данному углу (подобно тому, как в основе измерения отрезков лежат равенство отрезков и откладывание отрезка, равного данному).

Мы уже говорили, что равенство фигур можно установить наложением. Но угол — бесконечная часть плоскости. Поэтому представить себе наложение одного угла на другой трудно. Осуществить же это наложение на практике никак невозможно. Поэтому мы сведём задачу сравнения углов к сравнению фигур ограниченных размеров. Для этого сначала решим практическую задачу.

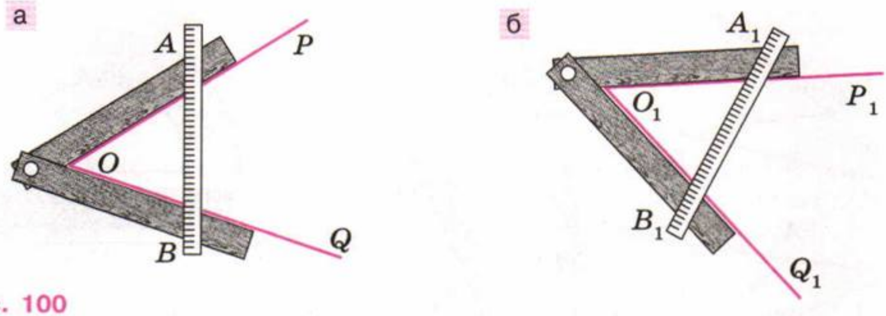


Рис. 100

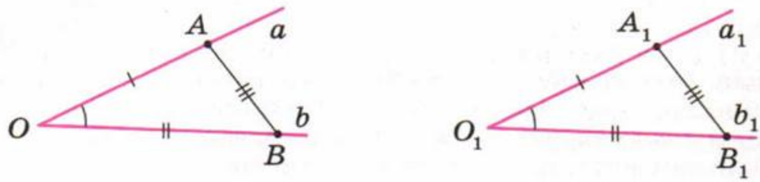


Рис. 101

Задача. Дан угол. Построить такой же угол в другом месте.

Как это сделать с помощью транспортира, вы уже знаете. А если транспортира нет? Мы поступим так.

Пусть дан угол O между отрезками OP и OQ (рис. 100, а). Возьмём две рейки, скрепим их одним концом и положим на отрезки OP и OQ. Затем скрепим любые две точки A и B этих реек поперечной рейкой. Из этих трёх реек получится жёсткая фигура, не изменяющаяся при переносе в другое место. Её можно перенести в нужное место и очертить там по рейкам угол (рис. 100, б). Он будет такой же, как данный.

На основе этого практического построения, переведя его на язык геометрии, определим **равенство углов**.

Пусть даны угол с вершиной O и сторонами a и b и угол с вершиной O_1 и сторонами a_1, b_1 (рис. 101). Допустим, что на их сторонах найдутся такие точки A, B и A_1, B_1, что $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $A_1B_1 = AB$. Тогда эти **углы** называются **равными**.

Равенство углов записывают так: $\angle O = \angle O_1$, $\angle ab = \angle a_1b_1$, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Равные углы обозначают одинаковым числом дуг, как на рисунке 101.

Хорды AB и A_1B_1 двух углов O и O_1 назовём **соответственными**, если $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$ (рис. 102).

Теперь определение равенства углов можно сформулировать совсем кратко: **два угла называются равными, если у этих углов найдутся равные соответственные хорды.**

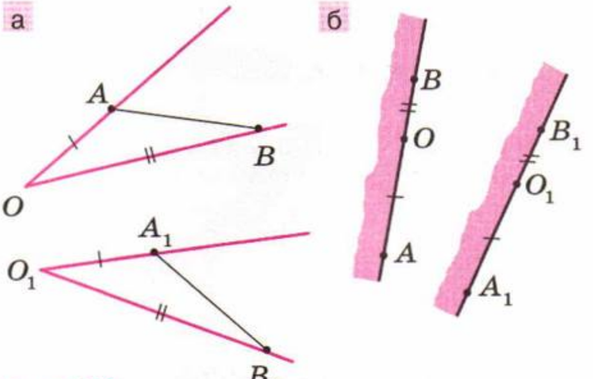


Рис. 102

Совмещая наложением два реальных равных угла (например, два одинаковых чертёжных угольника), мы совмещаем их вершины и их стороны. Можно заметить, что при этом совмещаются соответственные хорды. Поэтому *у равных углов соответственные хорды равны.*

Это практическое наблюдение приводит нас к следующей аксиоме:

Аксиома (*о свойстве равных углов*). Соответственные хорды равных углов равны.

Подробнее это означает следующее. Если $\angle O = \angle O_1$, а AB и A_1B_1 — соответственные хорды углов O и O_1, то $AB = A_1B_1$ (см. рис. 101).

Аксиоме о свойстве равных углов можно дать такую формулировку: **соответственные хорды отсекают от равных углов равные треугольники.**

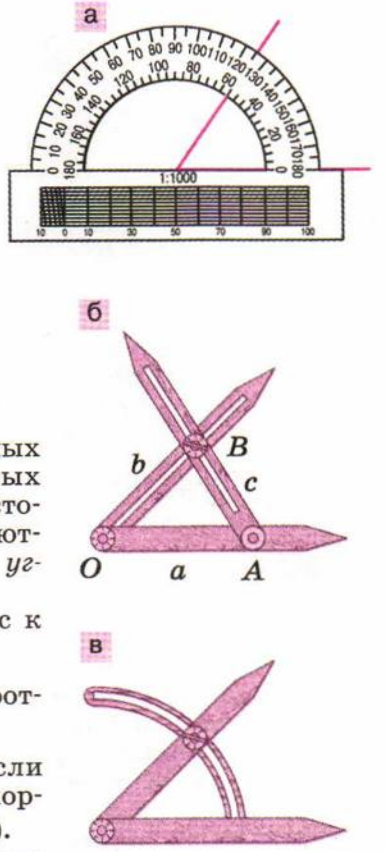


Рис. 103

Особый случай представляет развёрнутый угол. *Все развёрнутые углы равны.*

Действительно, для таких углов $AB = AO + OB = A_1O_1 + O_1B_1 = A_1B_1$ (см. рис. 102, б).

Замечание. Транспортир (рис. 103, а), поделённый на градусы, похож на линейку, разделённую на миллиметры. Применяя транспортир, конечно, можно построить угол, равный данному гулу. Но есть и совсем простой инструмент для решения этой задачи (рис. 103, б). Используя его, мы как бы повторяем определение равенства углов: равенство углов следует из равенства отрезков. Если сравнить транспортир и этот инструмент, то можно заметить, что вместо хорды AB (см. рис. 103, б) угол между радиусами на транспортире фиксируется дугой окружности. Так делают и в других инструментах для построения углов, равных данному углу (рис. 103, в).

Вопросы для самоконтроля

1. Перед вами два нарисованных угла. Как выяснить, равны ли эти углы, если у вас есть только циркуль?
2. Какие хорды двух углов называются соответственными?
3. Верно ли, что два угла равны, если у них найдутся равные хорды? Если это неверно, то как исправить такую фразу, чтобы она стала верной?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

3.10. Какие обоснования вы бы дали таким утверждениям: а) два угла, смежные с равными углами, равны; б) два угла, смежные с одним и тем же углом, равны?

Смотрим

3.11. Укажите на рисунке 104 равные углы.

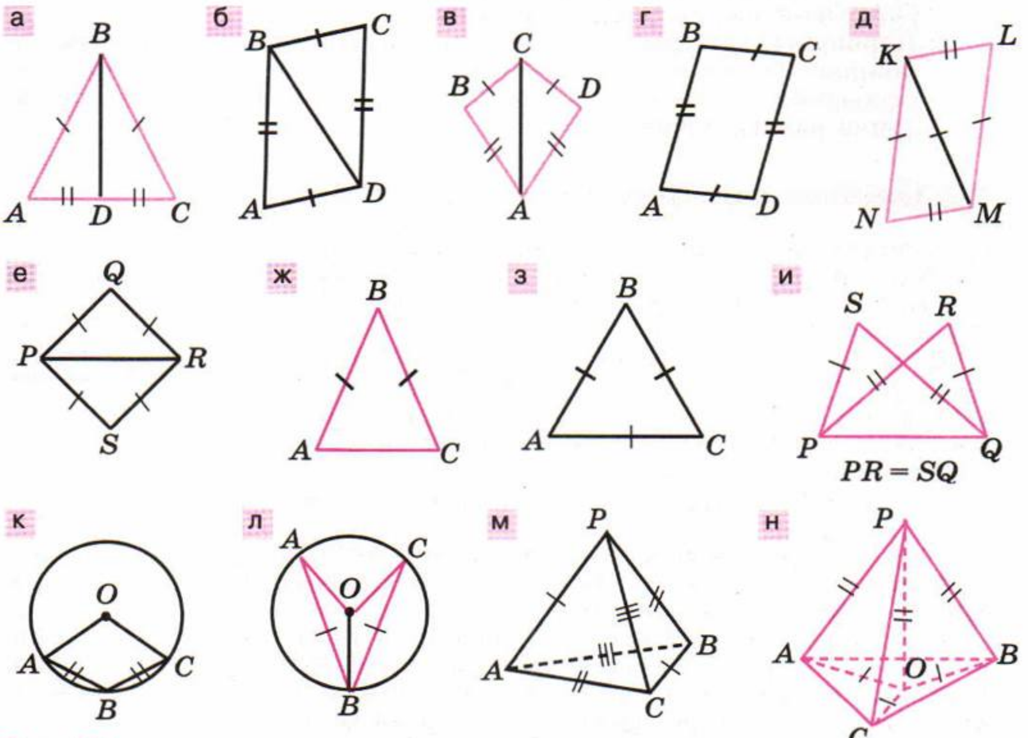


Рис. 104

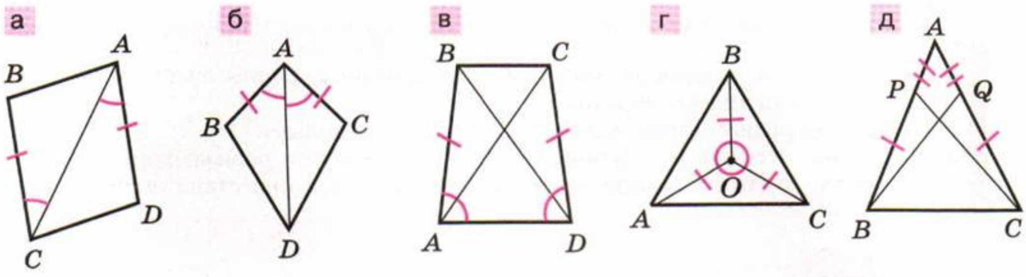


Рис. 105

3.12. На рисунке 105 отмечены равные углы и равные отрезки. Найдите ещё пары равных отрезков на этом рисунке. Укажите также на них пары равных треугольников.

Рисуем

3.13. Нарисуйте пирамиду, как на рисунке 73, и, в основании которой — квадрат и у которой все боковые рёбра равны между собой. Отметьте на рисунке равные углы.

3.14. Нарисуйте четырёхугольную пирамиду, у которой противоположные боковые рёбра равны между собой, а все стороны основания равны друг другу (см. рис. 73, и). Отметьте на рисунке равные углы.

3.3. Откладывание угла

Сравнивать два любых угла мы сможем с помощью откладывания угла (аналогично тому, как сравнивать два отрезка мы могли благодаря откладыванию отрезка).

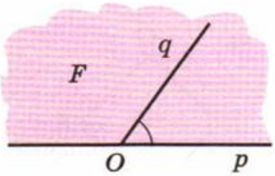


Рис. 106

Отложить какой-нибудь **угол от данного луча p** с началом в точке O в полуплоскость F, на границе которой лежит луч p, — это значит провести какой-либо луч q из точки O в полуплоскость F (рис. 106). О возможности отложить угол, равный данному углу, и говорит следующая аксиома.

Аксиома (*аксиома откладывания угла*). От каждого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один (рис. 107).

Легко проиллюстрировать на практике это построение, взяв в качестве полуплоскости лист бумаги, а в качестве угла — чертёжный треугольник (рис. 108) или какую-либо другую модель угла (картонную, бумажную). Как строится угол, равный данному углу, циркулем и линейкой, мы расскажем, решая задачу 3.15.

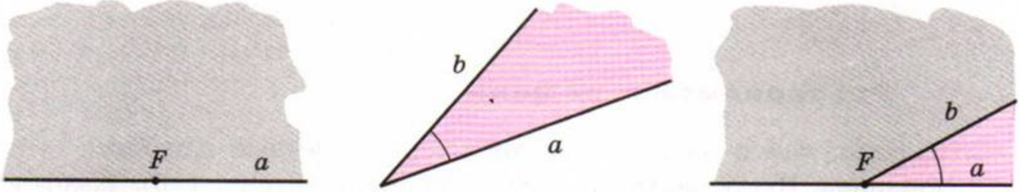


Рис. 107

Разберём подробнее, о чём говорится в аксиоме откладывания угла, вспомнив, какие углы считаются равными.

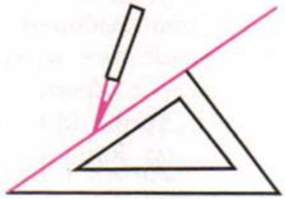


Рис. 108

Пусть даны угол ab с вершиной O и луч a_1 с началом O_1 (рис. 109, а). Прямая, содержащая луч a_1, разбивает плоскость на две полуплоскости. Одну из них обозначим значком +. Возьмём на лучах a и b какие-нибудь точки A и B. Соединим их отрезком AB. На луче a_1 отложим отрезок O_1A_1, равный OA (рис. 109, б). Проведём окружность F_1 с центром O_1 радиусом OB и окружность F_2 с центром A_1 радиусом AB.

Аксиома откладывания угла, во-первых, утверждает, что эти окружности пересекаются и одна из их точек пересечения лежит в отмеченной полуплоскости. Обозначим эту точку B_1. Теперь если из точки O_1 провести луч b_1, то получится угол a_1b_1, равный углу ab. Он будет равен углу ab по определению равенства углов, так как $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $A_1B_1 = AB$ (по построению).

Именно об этом и говорится в первой части аксиомы: *от данного луча по любую сторону можно отложить угол, равный данному.*

Во-вторых, аксиома откладывания угла утверждает, что такой угол можно отложить *только один.* Если взять на сторонах угла ab вместо точек A и B любые другие и сделать такое же построение, то получится тот же угол a_1b_1.

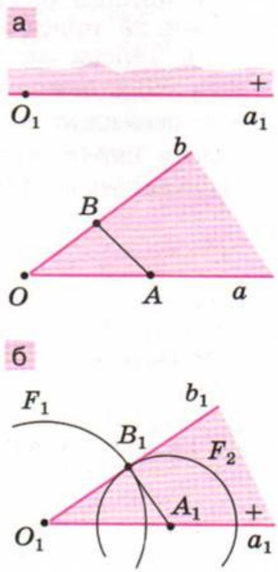


Рис. 109

Вопросы для самоконтроля

1. Что значит отложить угол от данного луча в заданную полуплоскость?
2. Сколько аксиом вы теперь знаете? Помните ли вы их все?

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

3.15. Циркулем и линейкой построить угол, равный данному.

Решение. Пусть задан угол ab с вершиной O (рис. 110). Требуется построить равный ему угол. Прежде всего уточним где. Построение угла состоит в том, что проводятся два луча из одного начала. Сперва выберем новое начало — точку O_1. Затем проведём из неё первый луч a_1 (рис. 111, а). Строить угол, равный данному углу, можно с обеих сторон от луча a_1. Поэтому выберем и сторону от луча a_1 (рис. 111, б). Теперь мы уточнили задачу: *циркулем и линейкой от луча a_1 в заданную сторону отложить угол, равный данному.*

Чтобы воспользоваться определением равенства углов, надо сначала на сторонах угла ab выбрать две точки. Сделаем это так: циркулем опишем окружность S с центром O и любым радиусом R и отметим те точки A и B, в которых она пересекает лучи a и b (рис. 112). Теперь на луче a_1 отложим отрезок O_1A_1, равный отрезку OA. Для этого опишем окружность S_1 с центром O_1 и тем же радиусом R. В пересечении её с лучом a_1 получим точку A_1 (рис. 113, а). Нам осталось найти такую точку B_1 с заданной стороны от луча a_1, чтобы выполнялись равенства: $O_1B_1 = OB$ и $A_1B_1 = AB$. Первое из этих ра-

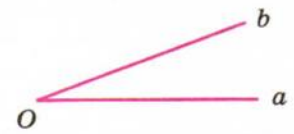


Рис. 110

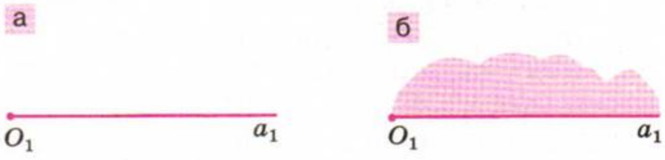


Рис. 111

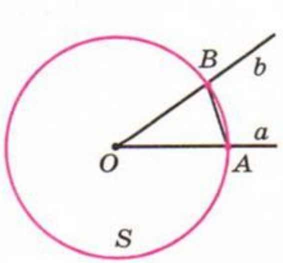


Рис. 112

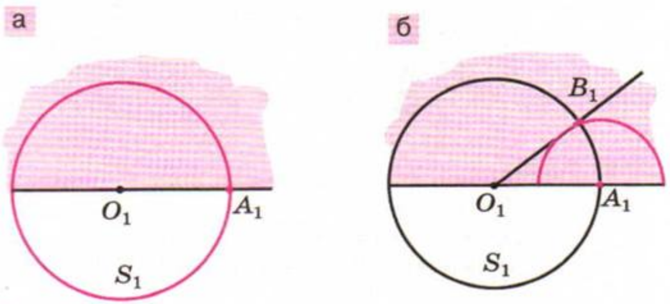


Рис. 113

венств говорит, что точка B_1 лежит на окружности S_1. А второе означает, что хорда A_1B_1 окружности S_1 должна быть равна хорде AB окружности S. Вот мы и проведём с таким радиусом AB с заданной стороны от луча a_1 полуокружность с центром A_1. Точка её пересечения с окружностью S_1 и будет точкой B_1. Осталось провести луч O_1B_1, после чего построение закончилось (рис. 113, б).

Докажем, что построенный угол равен углу ab. Действительно, для углов с вершинами O и O_1 выполнены равенства: $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $A_1B_1 = AB$ (мы так строили). Поэтому угол O_1 равен углу O. Задача решена.

Строим

3.16. Нарисуйте окружность с центром в точке A. Отметьте на ней точки B и C. Постройте угол, равный углу BAC, так, чтобы одной его стороной был луч AC. Затем постройте угол с вершиной в точке A, равный углу BAC. Какой из таких углов построить проще всего?

3.17. Нарисуйте луч c. Постройте лучи a и b, которые образуют с лучом c какие-нибудь равные углы.

Планируем

3.18. Однажды Феде понадобилось для создания орнамента построить 10 равных углов, да побыстрее. Что вы ему посоветуете?

Доказываем

3.19. Докажите, что $\angle OBA = \angle OCD$ (рис. 114).

3.20. Четыре точки A, B, C, D таковы, что $CA = CB$ и $DA = DB$. Докажите, что отрезок CD виден из точек A и B под равными углами. (**Угол, под которым виден отрезок** CD **из точки** A, — это угол CAD.)

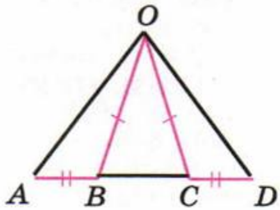


Рис. 114

3.21. Постройте две концентрические окружности с центром O. а) На меньшей из них отметьте точку A, а на большей — две такие точки B и C, что $AB = AC$. Докажите, что отрезки AB и AC видны из точки O под равными углами. б) Докажите аналогичное утверждение, взяв точку A на большой окружности, а точки B и C на малой.

3.22. Постройте окружность с центром O. Отметьте на ней точку P. Постройте окружность с центром P и радиусом PO. Пусть A и B — точки пересечения этих окружностей. а) Докажите, что отрезок AB виден из точек O и P под равными углами. б) Докажите, что отрезок OP виден из точек A и B под равными углами. в) Какое из этих утверждений останется верным, если радиус второй окружности не будет равным OP?

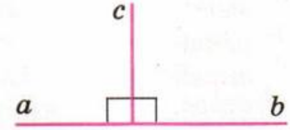


Рис. 115

Применяем геометрию

3.23. Как построить на земле угол, равный данному, имея в руках один кусок верёвки?

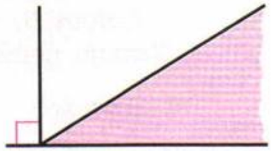


Рис. 116

3.4. Сравнение углов. Прямой угол. Биссектриса угла

Умея строить угол, равный данному углу, можно сравнить любые два угла (подобно тому, как, откладывая отрезки, сравнивают их (см. п.1.3). Объясните самостоятельно, как выполняется такое сравнение, что означает такое выражение: один из углов больше (или меньше) другого.

Зная, как сравнивают углы, мы теперь можем определить несколько важных понятий.

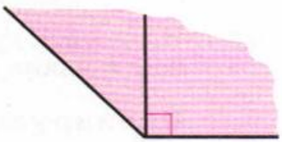


Рис. 117

Прямым углом называется угол, равный своему смежному (рис. 115). На рисунках прямые углы обычно обозначают так, как на рисунке 115.

Можно сказать и так: *прямой угол — это половина развёрнутого угла.* Поэтому **все прямые углы равны друг другу** (как половины равных друг другу развёрнутых углов).

Угол, меньший прямого угла, называется **острым углом** (рис. 116).

Угол, больший прямого угла, но неразвёрнутый, называется **тупым углом** (рис. 117).

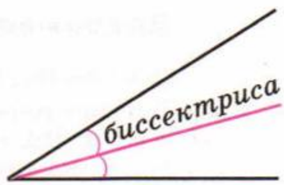


Рис. 118

Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине угла, который делит угол пополам, т. е. разбивает его на два равных угла (рис. 118).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны треугольника (рис. 119).

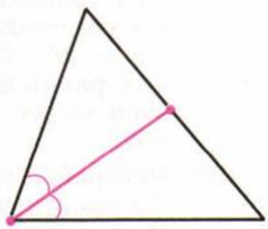


Рис. 119

Справка словесника. Обратите внимание на то, что в слове *биссектриса* корень *сектр* (знакомо, правда?), а приставка *бис*, что означает *повторить, дважды*. Итак, по самому строению слова *биссектриса* легко определить его смысл, а также понять, почему в этом слове нужно писать удвоенную согласную *с*.

Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите, как сравнить два угла.
2. Какие виды углов вы знаете?
3. Какой угол называют прямым?
4. Что называют биссектрисой угла, а что — биссектрисой треугольника? Что у них общего и чем они отличаются?

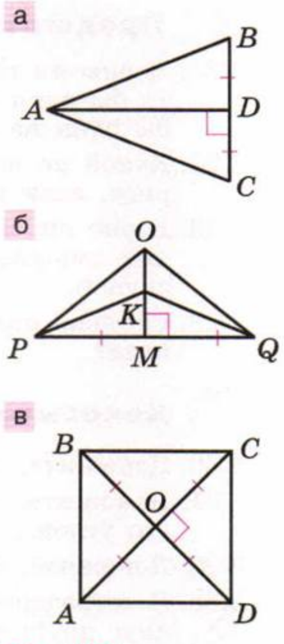


Рис. 120

ЗАДАЧИ

Смотрим

3.24. На рисунке 120 отмечены прямые углы и равные отрезки. Найдите ещё пары равных отрезков на этом рисунке.

3.25. Какие из лучей на рисунке 121 являются биссектрисами изображённых там углов?

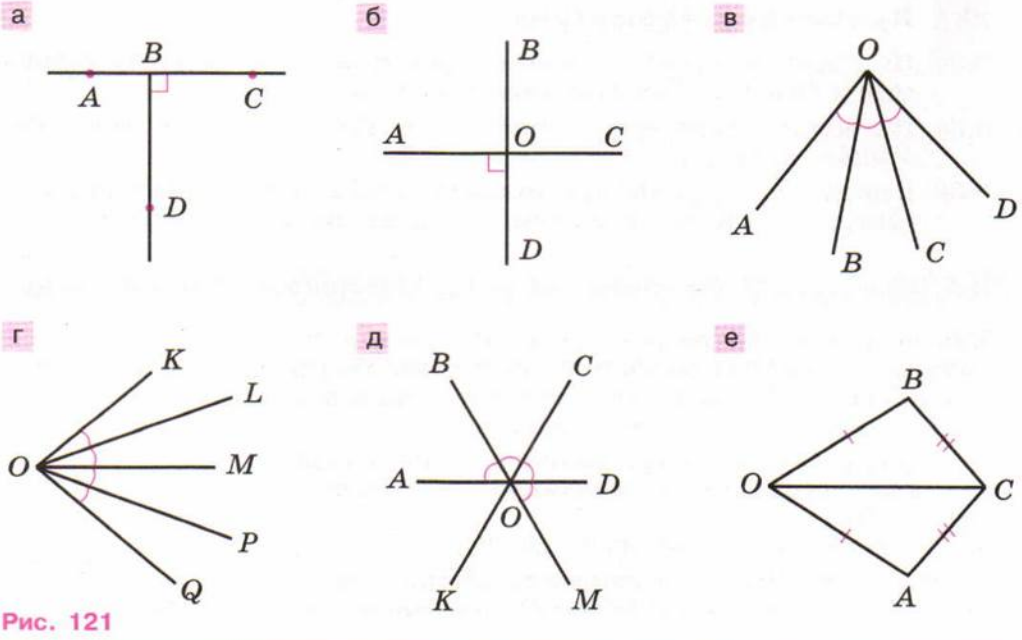


Рис. 121

Представляем

3.26. Верны ли такие утверждения: а) если два угла смежные, то хотя бы один из них острый; б) если два угла смежные, то хотя бы один из них больше другого?

3.27. Какой по виду угол составляет со сторонами угла его биссектриса, если данный угол: а) развёрнутый; б) неразвёрнутый?

3.28. Верно ли, что если два прямых угла имеют общую сторону, то они смежные? Рассмотрите в том числе и пространственный случай.

3.29. Сколько прямых углов в гранях прямоугольного параллелепипеда?

Доказываем

3.30. Докажите, что диагонали всех граней куба равны между собой.

3.31. Докажите, что диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

3.32. Докажите, что диагонали квадрата имеют общую середину.

3.33. В тетраэдре $PABC$ равны рёбра PA, PB и PC, а также равны друг другу углы APB, APC и BPC. Докажите, что равны друг другу и все остальные углы граней APB, APC и BPC.

Применяем геометрию

3.34. На классной доске нарисованы два угла. У вас в руках только мел и бечёвка. Как сравнить эти углы?

3.35. На земле нарисован прямой угол. Как проверить это с помощью верёвки?

3.36. Вырежите из бумаги треугольник. Сгибая его, найдите его биссектрисы. Что вы заметили, глядя на эти биссектрисы?

3.5. Построение биссектрисы угла. Построение прямого угла

Как построить биссектрису угла циркулем и линейкой, вы можете догадаться, посмотрев на рисунок 121, е. Сравните свои догадки с приведённым дальше решением этой задачи.

Задача. Построить биссектрису данного угла.

Дано: угол ab с вершиной в точке O (рис. 122).

Построить: биссектрису угла ab.

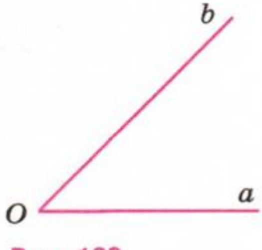


Рис. 122

Решение. Нам надо построить внутри угла ab такой луч c, идущий из точки O, что $\angle ac = \angle bc$.

Из рисунка 121, е видно, что на сторонах угла ab надо построить точки A и B так, чтобы выполнялось равенство $OA = OB$, а затем внутри угла ab найти такую точку C, чтобы выполнялось равенство $AC = BC$. Точка C, равноудалённая от точек A и B, лежит на окружностях с центрами в этих точках одного и того же радиуса. Тем самым мы наметили план построения (или, как можно ещё сказать, *алгоритм*). Он может быть выполнен в несколько этапов. Осуществим его.

Построение. *Первый этап.* Откладываем на стороне a любой отрезок OA и на стороне b отрезок OB, равный отрезку OA (рис. 123, а). Другими словами, циркулем строим окружность S с центром в точке O любого радиуса r и берём точки пересечения A и B окружности S с лучами a и b.

Второй этап. Строим ещё две окружности S_1 и S_2 с центрами в точках A и B и одинаковыми радиусами r_1 (рис. 123, б). Если угол ab неразвёрнутый, то можно взять $r_1 = r$, а если угол ab развёрнутый, то берём $r_1 > r$ (рис. 123, в).

Третий этап. Окружности S_1 и S_2 пересекутся в двух точках. Одна из них, назовём её C, лежит внутри угла ab.

Четвёртый этап. Через точку C из точки O проведём луч OC (рис. 123, г). Он и является биссектрисой угла ab.

Это требуется еще доказать.

Доказательство. Проведём отрезки AC и BC и рассмотрим углы AOC и BOC (см. рис. 123, г). Для этих углов отрезки AC и BC являются соответственными хордами (так как $OA = OB$ и $OC = OC$). Кроме того, $AC = BC = r_1$ (по построению, как радиусы равных окружностей S_1 и S_2). Поскольку углы AOC и BOC имеют равные соответственные хорды AC и BC, то эти углы равны (по признаку равенства углов).

Исследование. Задача имеет лишь одно (единственное) решение, так как в противном случае оказалось бы, что две половины одного и того же угла не были бы равны. ■

Если угол ab был развёрнутый, то, построив его биссектрису c, мы построили два прямых угла ac и bc (рис. 124). Следовательно, мы решили и такую задачу: *построить прямой угол.*

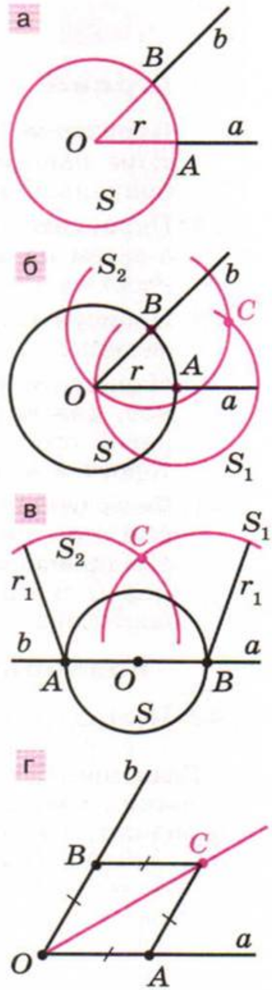


Рис. 123

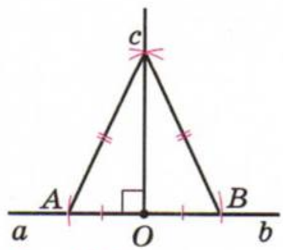


Рис. 124

ЗАДАЧИ

Строим

3.37. Нарисуйте угол. Разделите его сначала пополам, а затем на четыре равных угла. Сколько пар равных углов изображено на получившемся рисунке?

3.38. Нарисуйте развёрнутый угол. Разделите его сначала пополам, а затем на четыре равных угла. Сколько прямых углов изображено на получившемся рисунке?

3.39. Нарисуйте треугольник. Постройте его биссектрисы. Что вы заметили?

3.40. Нарисуйте отрезок AC. Постройте несколько четырёхугольников, для которых этот отрезок является диагональю и биссектрисой его углов A и C. Найдите такой четырёхугольник, у которого и вторая диагональ является биссектрисой его углов.

3.41. Федя решил упростить построение биссектрисы угла. Он поступил так: построил сначала угол с вершиной в точке O, затем его произвольную хорду AB, разделил эту хорду пополам точкой C и провёл луч OC. Он считает, что биссектриса угла O построена — это луч OC. Прав ли он?

Разбираемся в решении

3.42. Постройте циркулем и линейкой середину заданного отрезка, т. е. разделите этот отрезок пополам.

Решение. Пусть задан отрезок AB (рис. 125, а). Построим равносторонний треугольник ABC (рис. 125, б), такое построение мы уже проводили, решая задачу 1.22. Проведём биссектрису c угла ACB (рис. 125, в). Она пересечёт хорду AB этого угла в некоторой точке O. Докажем, что точка O — середина отрезка AB. Отрезки AO и OB соответственные хорды двух равных углов OCA и OCB. По аксиоме о свойстве равных углов отрезки AO и OB равны, т. е. точка O делит отрезок AB пополам. ■

Выделите в этом кратком решении те этапы, которые мы подробно рассмотрели при построении биссектрисы угла.

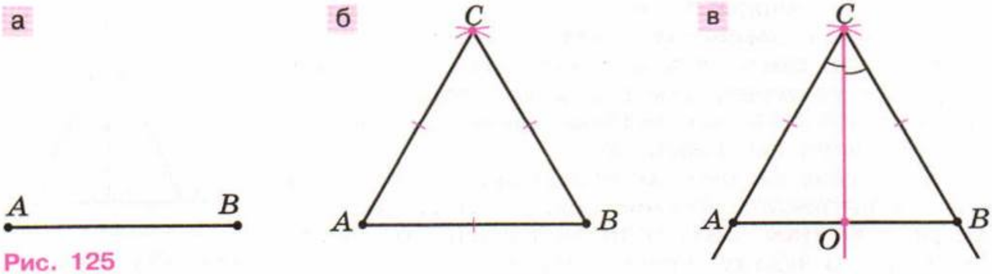


Рис. 125

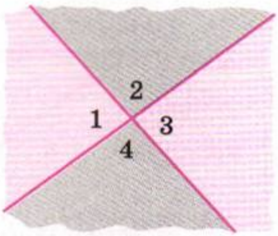
Доказываем

3.43. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его диагональ BD_1. Докажите равенство углов A_1BB_1 и C_1BB_1. Является ли луч BD_1 биссектрисой угла A_1BC_1? Почему?

3.6. Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые

Две пересекающиеся прямые на плоскости разбивают её на две пары вертикальных углов (рис. 126, а): углы 1 и 3 образуют одну пару вертикальных углов, а углы 2 и 4 — вторую пару вертикальных углов. Определить вертикальные углы можно так:

а



б

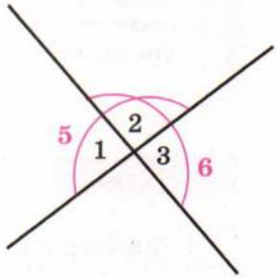


Рис. 126

Определение. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла.

Мы часто будем использовать важное свойство вертикальных углов: **вертикальные углы равны**.

□ Докажем его. Убедимся, например, что равны углы 1 и 3. Действительно, посмотрим на рисунок 126, б. Развёрнутые углы 5 и 6 содержат один и тот же угол 2. Но все развёрнутые углы равны друг другу. Если из равных углов 5 и 6 отнять (вычесть) один и тот же угол 2, то останутся равные углы 1 и 3. А это и есть вертикальные углы, равенство которых мы доказываем. ■

Если из четырёх углов, образованных прямыми a и b, хотя бы один оказался прямым углом, то и остальные три угла являются прямыми (рис. 127).

□ Действительно, пусть угол 1 прямой. Тогда смежные с ним углы 2 и 4 также прямые. Углы 3 и 1 равны как вертикальные, следовательно, угол 3 тоже прямой. ■

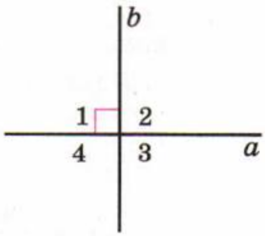


Рис. 127

Те пересекающиеся прямые, которые образуют четыре прямых угла, называются взаимно **перпендикулярными**. Перпендикулярность прямых a и b обозначают так: $a \perp b$. Взаимно перпендикулярными называют также отрезки и лучи, лежащие на взаимно перпендикулярных прямых, в частности стороны прямого угла. Для них также употребляется знак $\perp$. Например, пишем $OA \perp OB$, если угол AOB прямой.

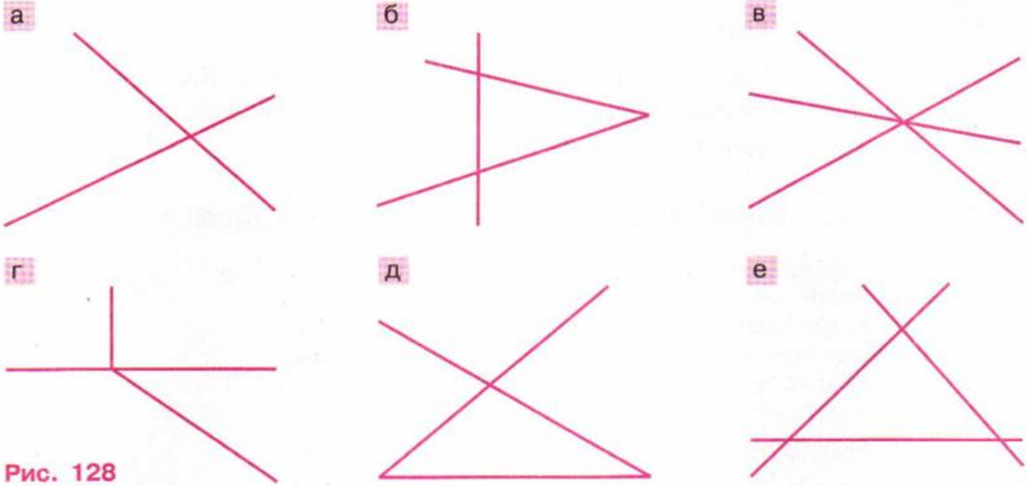


Рис. 128

Вопросы для самоконтроля

1. Каким свойством обладают вертикальные углы?
2. Какие прямые называются взаимно перпендикулярными?
3. Известно, что два угла равны. Что о них дополнительно надо знать, чтобы утверждать, что они вертикальные?

ЗАДАЧИ

Смотрим

3.44. Сколько пар вертикальных углов вы можете насчитать на рисунке 128?

3.45. Нарисуйте треугольник. Нарисуйте углы, вертикальные с углами треугольника. На сколько частей разбивают плоскость нарисованные вами три прямые?

3.46. Найдите равные друг другу углы на рисунке 129.

3.47. Нарисуйте четырёхугольную пирамиду $PABCD$ и луч, идущий из вершины P через точку O пересечения диагоналей основания. Сколько пар вертикальных углов с вершиной O вы можете насчитать на рисунке?

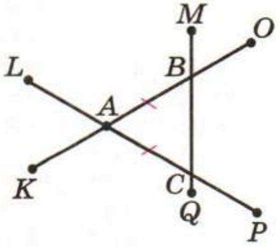


Рис. 129

Представляем

3.48. Два угла являются вертикальными. Какими являются углы, смежные с данными?

Доказываем

3.49. Через центр окружности проведены диаметры AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

3.50. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. При этом $AO = OB$ и $CO = OD$. Докажите, что $AD = BC$. Может ли быть, что $AB = CD$?

Исследуем

3.51. Нарисуйте прямую и отрезок BC на этой прямой. Внутри отрезка BC отметьте точку A. Нарисуйте угол BAK. С другой стороны от прямой BC постройте угол CAM, равный углу ABK. Как расположены лучи AK и AM? Как вы можете это объяснить?

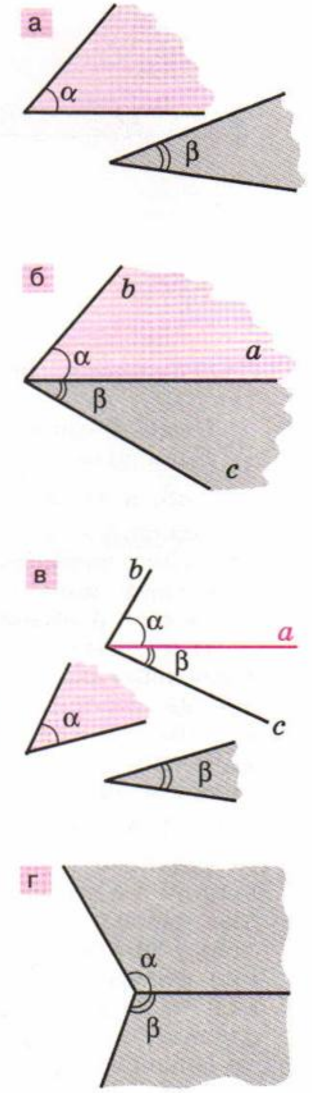


Рис. 130

3.7. Действия с углами

Все действия с углами мы проводим в одной плоскости. Углы можно складывать подобно тому, как складывают отрезки, только отрезки прикладывают друг к другу концами, а углы — сторонами (рис. 130, а, б). Складывая два угла α и β, обычно один из них оставляют на месте, второй же откладывают от одной из сторон первого угла (см. рис. 130, б). Но можно поступить и так. От некоторого луча a в одну сторону отложить угол ab, равный α, а в другую сторону — угол ac, равный β (рис. 130, в). Построенный угол bc и является **суммой углов** α и β. Но надо заметить, что угол bc, равный сумме углов α и β, может оказаться и большим развёрнутого угла (рис. 130, г).

Сложим таким образом два развёрнутых угла ab и ac с общей вершиной O (рис. 131, а на с. 72). Их сумма составит всю плоскость, лучи b и c совпадут, а полученную фигуру называют **полным углом** вокруг точки O (рис. 131, б).

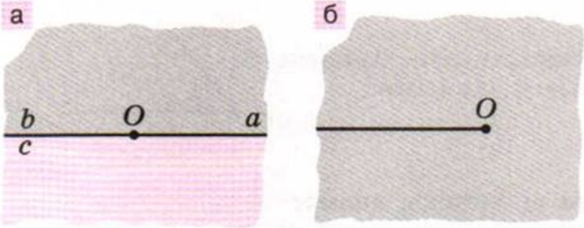


Рис. 131

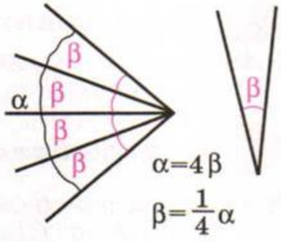


Рис. 132

Иначе говоря, полный угол — это плоскость, на которой отмечен луч.

Суммой смежных углов является развёрнутый угол (см. рис. 98).

Если угол α складывается из n углов, равных углу β, то пишут $\alpha = n\beta$, а также $\beta = \frac{1}{n}\alpha$ (рис. 132).

Операцию вычитания углов определяют как операцию, обратную операции сложения углов. При этом, естественно, из большего угла вычитают меньший угол. Объясните подробнее, как строится разность $\alpha - \beta$ углов α и β, когда $\alpha > \beta$.

В предыдущих пунктах этого параграфа мы уже фактически начали действия с углами: при изучении смежных и вертикальных углов мы говорили о сумме и разности углов, а строя биссектрису угла, мы делили угол пополам. Операции сложения, вычитания и умножения углов на натуральные числа мы умеем выполнять циркулем и линейкой. Делить угол пополам, а значит, и на 4, на 8, на 16 и т. д. равных частей мы тоже умеем циркулем и линейкой.

▲ **Задача о трисекции угла.** А можно ли разделить циркулем и линейкой на равные части, не кратные двум (например, на три равные части), любой угол? Оказывается, не всегда. Эту задачу пытались решить ещё древнегреческие математики. Она получила название задачи о *трисекции угла*. Некоторые углы, например прямой или развёрнутый, можно разделить на три равные части. Как это сделать, вы скоро узнаете. Но решения, пригодного для любого угла (подобно тому, как это было сделано для деления угла пополам), для задачи о трисекции угла ни в Древней Греции, ни позднее найти не удавалось. И лишь в XIX в. доказали, что для произвольных углов такого решения с помощью циркуля и линейки не существует. Например, нельзя разделить на три равные части угол, равный одной трети развёрнутого угла. И не пытайтесь!

Используя другие инструменты, задачу о трисекции угла решить можно. Приближённо же (с любой степенью точности) можно решить её и циркулем и линейкой, как и задачу о делении угла на любое натуральное число n. ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Какие операции можно выполнять с углами?
2. В чём различие в операциях с отрезками и с углами?
3. Всегда ли выполнимы операции с углами?
4. Что вы знаете о полном угле?
5. На любое ли число равных углов можно разделить данный угол? А если делить его циркулем и линейкой?

ЗАДАЧИ

Смотрим

3.52. На рисунке 133 каждый из обозначенных цифрой углов представьте как сумму или разность других углов.

3.53. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точку O — точку пересечения диагоналей грани $ABCD$. Нарисуйте затем отрезки B_1D и B_1O. Верно ли, что:
а) $\angle AB_1C = \angle AB_1O + \angle OB_1C$; б) $\angle AB_1C = \angle AB_1D + \angle DB_1C$?

Рисуем

3.54. Нарисуйте угол. Из его вершины внутрь угла проведите луч. Обозначьте полученные углы. Каждый из них запишите как сумму или разность двух других углов на этом рисунке. Выполните то же задание, проведя два луча внутри данного угла из его вершины.

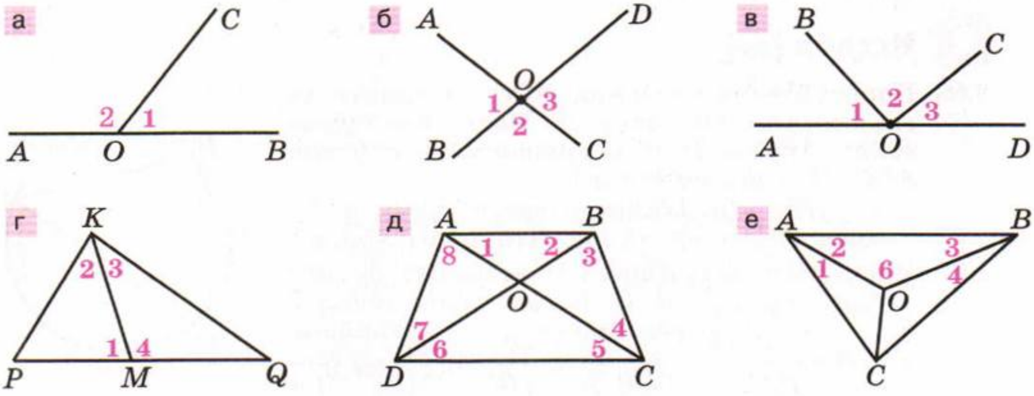


Рис. 133

Строим

3.55. Нарисуйте два неравных угла. Постройте их сумму и разность. Сравните результаты с развёрнутым углом. Какие возможны случаи?

3.56. Нарисуйте угол. Обозначьте его α. Постройте угол 2α. Каким будет угол 2α, если угол α: а) прямой; б) острый; в) тупой?

3.57. Федя нарисовал на классной доске два угла, построил их сумму и разность и собрался показать это учителю. Но пришёл Вася, стёр исходные углы, а их сумму и разность оставил. Помогите Феде восстановить стёртые углы.

Рассуждаем

3.58. Что общего между действиями с углами и действиями с отрезками (а также с числами), а в чём различия?

Доказываем

3.59. Докажите, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

3.60. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов составляют прямую.

3.61. Нарисуйте две пересекающиеся прямые. Постройте биссектрисы четырёх образованных ими углов. Как выполнить это задание быстрее? Докажите, что построенные биссектрисы образуют две взаимно перпендикулярные прямые.

3.62. Нарисуйте угол ab. а) Из его вершины внутрь этого угла проведите такие лучи c и d, что $\angle ac = \angle bd$. Докажите, что $\angle ad = \angle bc$. б) А теперь проведите из вершины угла ab лучи c и d вне угла ab и так, что $\angle ac = \angle bd$. Верно ли теперь равенство $\angle ad = \angle bc$?

Исследуем

3.63. Нарисуйте треугольник ABC. Возьмите на его стороне AB точку D. Постройте сумму углов ABC и DCB и сравните её с углом ADC. Что вы заметили?

3.64. Нарисуйте какой-нибудь треугольник и постройте сумму его углов. Что вы заметили?

3.65. Нарисуйте окружность и возьмите на ней четыре точки A, B, C, D так, чтобы точки B и D лежали на различных дугах с концами в точках A и C (рис. 134). Постройте суммы углов $\angle DAB + \angle DCB$ и $\angle ABC + \angle ADC$. Что вы заметили?

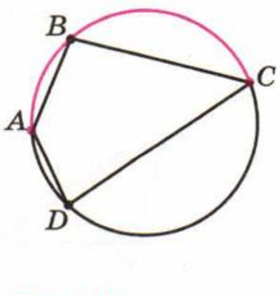


Рис. 134

Применяем геометрию

3.66. На листе бумаги нарисуйте угол. Только сгибанием листа получите угол: а) в два раза меньше данного; б) в два раза больше данного; в) дополняющий его до прямого угла.

3.8. Измерение углов

Как каждый отрезок имеет величину — длину отрезка, так каждый угол тоже имеет некоторую величину, которая называется **мерой угла**. Она характеризует величину отклонения одного направления от другого.

Мера угла обладает свойствами, аналогичными свойствам длины отрезка:

1) *меры равных углов равны;*

2) *при сложении углов их меры складываются.*

Измерение углов подобно измерению отрезков: оно состоит в сравнении измеряемого угла с углом, принятым за единицу измерения. Этот угол, а если нужно и его доли, откладываются на измеряемом угле. В результате получается *численная мера угла при данной единице измерения,* т. е. число, показывающее, сколько раз угол, принятый за единицу измерения, и его доли укладываются в данном угле.

За единицу измерения, как вы знаете, принимают градус — $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус обозначают так: $1°$. Прямой угол имеет меру $90°$, развёрнутый угол — $180°$. Градус делится на 60 минут, а минута — на 60 секунд. Одну минуту обозначают $1'$, одну секунду — $1''$. Например, если угол имеет меру в 25 градусов 26 минут и 27 секунд, то пишут $25° 26'27''$.

Часто вместо «мера угла» говорят просто «угол», подразумевая при этом не только фигуру, но и её величину. Например, говорят: «Угол равен 60 градусам» вместо «Мера угла равна 60 градусам». И мы будем так говорить, когда это не будет вести нас к путанице. И писать тоже можно так: $\angle ab = 60°$ или $\alpha = 60°$.

Для численной меры угла, в частности для градусной меры, выполняются свойства, аналогичные свойствам численных значений длин отрезков. Они таковы:

1. *Если углы равны, то их градусные меры равны.* И обратно: *если градусные меры углов равны, то углы равны.*

2. *Больший угол имеет бóльшую градусную меру.* И обратно: *если градусная мера одного угла больше градусной меры другого угла, то первый угол больше второго угла.*

3. *При сложении углов их градусные меры складываются, а при вычитании вычитаются.*

Полный угол вокруг точки состоит из двух развёрнутых углов. Поэтому его градусная мера $360°$.

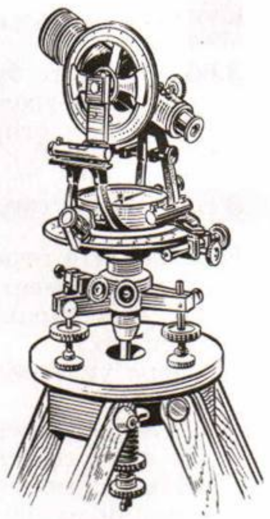
Градусная мера любых углов (а не только выпуклых) находится в границах от 0° до 360°. Возможно, что выбор числа 360 в измерении углов был связан с тем, что в древности полагали в году 360 дней, а также с системой счисления в древнем Вавилоне, в котором особое место занимало число 60.

Самый простой прибор для измерения углов — транспортир. При более точных измерениях применяют и другие приборы. Измерения углов производятся так же, как измерения длин отрезков. Но используют не прямую линейку с делениями, а «искривлённую линейку» — окружность, на которой тоже поставлены деления — градусы и их доли, например как на транспортире. С помощью транспортира не только измеряют углы, но и строят углы, меры которых заданы.

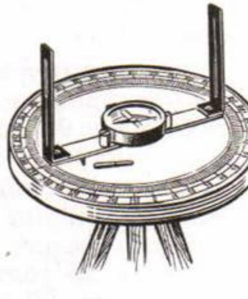
К Комментарий. Это неудивительно, что шкала транспортира расположена на окружности, а не на прямой, как на линейке для измерения отрезков: отрезок прямолинеен, и, продолжая его, мы производим действия на прямой, и поэтому здесь прямолинейная линейка вполне уместна. Складывая же углы, мы как бы поворачиваемся вокруг некоторой точки O — общей вершины этих углов, и поэтому дуга окружности с центром в точке O может служить мерой этого поворота. На такой дуге и расположена шкала делений транспортира. Большинство других приборов, предназначенных для измерения углов (*компас, теодолит, астролябия* и др. — рис. 135), построено по этому же принципу.

Кроме градусной, существуют и другие меры угла. Иногда угол измеряют в долях *прямого угла*, который обозначают буквой d, и тогда, например, угол 30° равен $\frac{d}{3}$. В морской навигации используют в качестве единицы измерения $\frac{1}{16}$ часть развернутого угла (или $\frac{1}{32}$ часть полного угла). Эта единица измерения называется *румбом*.

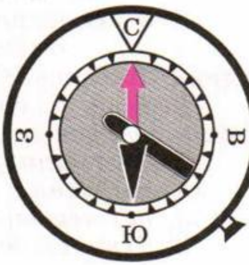
В старших классах вы познакомитесь ещё с *радианной* угловой мерой. Она применяется в технике, высшей математике, тригонометрии. За единицу измерения в ней принимается угол в 1 радиан, приблизительно равный 57°.



теодолит



астролябия



компас

Рис. 135

Потренируйтесь в нахождении различных мер одного и того же угла, в переходе от одной меры к другой.

Справка словесника. Слово *транспортир*, как и слово *транспорт*, происходит от французского *transporter*, что в переводе на русский означает *переносить*. Видимо, первоначально транспортир употреблялся не столько для измерения углов, сколько для того, чтобы переносить их с места на место, т. е. для построения угла, равного данному.

Вопросы для самоконтроля

1. Какими свойствами обладает мера угла?
2. Что общего в измерении углов и измерении отрезков?
3. Какие вы знаете единицы измерения углов?
4. Какими свойствами обладает численная мера угла?
5. Какие вы знаете приборы для измерения углов?

ЗАДАЧИ

Смотрим

3.67. Вычислите меры углов, изображённых на рисунке 136.

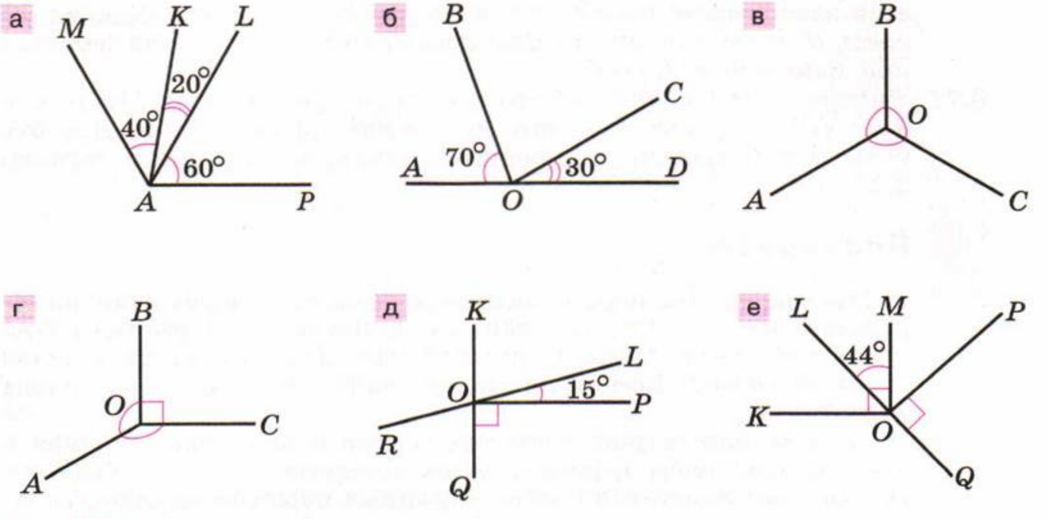


Рис. 136

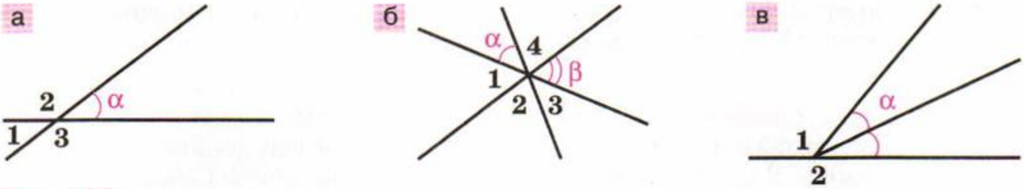


Рис. 137

3.68. Выразите меры углов, обозначенных цифрами на рисунке 137, через α и β.

Рисуем

3.69. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех таких точек X, что: а) $\angle XAB \leqslant 30°$; б) $\angle XBA \geqslant 30°$; в) $\angle XAB \leqslant 30°$ и $\angle XBA \leqslant 30°$; г) $\angle XAB \leqslant 30°$ и $\angle XBA \geqslant 30°$; д) $\angle XAB \geqslant 30°$ и $\angle XBA \geqslant 30°$.

Представляем

3.70. Представьте себе отрезок AB. Где лежат все точки X пространства, для которых: а) $\angle XAB \leqslant 60°$; б) $\angle XBA \geqslant 60°$; в) $\angle XBA = 90°$?

Работаем с формулой

3.71. Пусть α и β — смежные углы. а) Запишите формулу, которая связывает между собой их величины. б) Какой функцией является зависимость одной из этих величин от другой? Какова область её определения? в) Как изменяется одна из этих величин при изменении другой?

3.72. Внутри прямого угла из его вершины провели луч. Пусть α и β — углы, на которые этот луч разбил прямой угол. Про эти углы α и β составьте и решите задачи, аналогичные задачам 3.71 а—в.

Планируем

3.73. а) Проведены две пересекающиеся прямые и задан один из образовавшихся углов. Как найти остальные? б) Через одну точку на плоскости провели три прямые. Два из образовавшихся углов известны. Всегда ли можно найти величины остальных углов?

3.74. Проведена биссектриса некоторого угла и перпендикулярная к ней прямая через вершину угла. Величина данного угла известна. Как найти величины остальных образовавшихся углов? Всегда ли это можно сделать?

Находим величину

3.75. Угол равен 65°. Чему равны углы, смежный с ним и вертикальный к нему?

3.76. Внутри прямого угла из его вершины провели луч. Вычислите величины получившихся углов, если: а) один из них больше другого на 89°; б) один из них в 90 раз больше другого; в) половина одного из них равна трети другого.

3.77. Пусть угол ab равен 50°. Из вершины угла ab внутрь его провели такой луч c, что $\angle ac = 30°$. Какова величина угла cb?

3.78. Внутри прямого угла из его вершины через каждые 5° проведены лучи. а) Сколько их проведено? б) Какой угол образуют между собой третий луч от одной стороны прямого угла и третий луч от другой его стороны? в) Какой угол образуют между собой десятый луч от одной стороны прямого угла и десятый луч от другой его стороны?

3.79. Углы α и β смежные. Чему равен каждый из них, если: а) один из них больше другого на 90°; б) один из них в 9 раз больше другого; в) $2\alpha = 3\beta$?

Ищем границы

3.80. Внутри прямого угла из его вершины провели луч. В каких границах лежит второй из полученных углов, если первый угол: а) больше чем 1°; б) меньше чем 89°; в) больше чем 44°, но меньше чем 46°; г) больше второго; д) больше второго, но меньше удвоенного второго? Придумайте аналогичную задачу про смежные углы.

Исследуем

3.81. Нарисуйте острый угол. а) Через вершину угла проведите два луча, перпендикулярные сторонам угла, так, чтобы угол между ними был острый. Докажите, что построенный угол равен данному. б) Перпендикуляры к сторонам данного угла проведите так, чтобы они были сторонами тупого угла. Установите зависимость между данным и получившимся углами.

3.82. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную предыдущей, взяв за исходный тупой угол. Сравните полученные результаты с результатами предыдущей задачи и сформулируйте их в одном предложении.

3.83. Из точки O в плоскости исходят три луча: OA, OB, OC. Верно ли, что: а) $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$; б) $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 360°$?

3.84. Нарисуйте произвольный угол A. На его сторонах отложите равные отрезки AB и AC. Сравните каждый из углов ABC и ACB с прямым углом.

3.85. Нарисуйте произвольный угол A. На его сторонах отложите отрезки AB и AC так, чтобы AB был меньше AC. Сравните углы ABC и ACB.

3.86. Нарисуйте треугольник ABC, у которого угол C прямой. Сравните каждый из углов A и B с углом C.

3.87. Нарисуйте тупой угол BAC и смежный с ним угол BAD. Проведите отрезок BC. Сравните углы: а) BAD и ACB; б) BAD и ABC.

3.9. Двугранный угол

Ближе всех по свойствам к плоскому углу простейший из пространственных углов — двугранный угол. Когда говорят *угол дома* или *угол комнаты*, то имеют в виду угол между соседними стенами дома или комнаты, т. е. угол между двумя плоскими поверхностями, имеющими общее ребро (рис. 138). Эти примеры иллюстрируют понятие двугранного угла (рис. 139), о котором идёт речь в этом пункте.

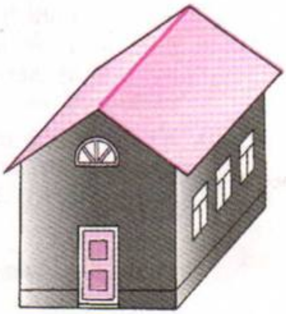


Рис. 138

Двугранным углом называется фигура, образованная парой полуплоскостей, имеющих общую граничную прямую. Эта прямая называется **ребром** двугранного угла, а полуплоскости, образующие двугранный угол, — **гранями** двугранного угла.

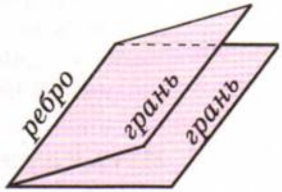


Рис. 139

Двугранный угол аналогичен обычному углу, если угол понимать как пару лучей, имеющих общее начало. Тогда ребро двугранного угла аналогично вершине обычного угла, а грани двугранного угла — сторонам обычного угла.

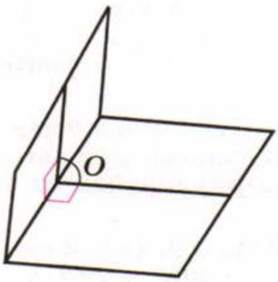


Рис. 140

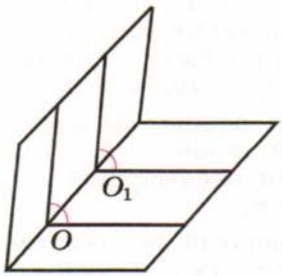


Рис. 141

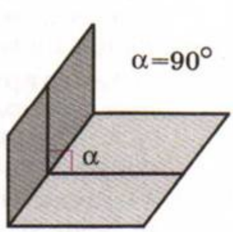


Рис. 142

Измеряют двугранные углы так: в гранях двугранного угла из некоторой точки O на его ребре проводят лучи, перпендикулярные ребру (рис. 140). Получается при этом обычный угол, который называется **линейным углом** двугранного угла. Его величину и считают величиной двугранного угла. Как будет доказано в старших классах, эта мера не зависит от выбора точки O на ребре двугранного угла (рис. 141).

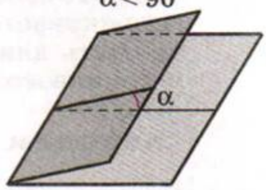


Рис. 143

Как и обычные углы, двугранные углы могут быть прямыми (рис. 142), острыми (рис. 143) и тупыми (рис. 144). Если двугранный угол прямой, то плоскости, в которых лежат его грани, называются взаимно **перпендикулярными**. Далее, говоря *двугранный угол*, мы имеем в виду, что его грани не лежат в одной плоскости, т. е. не рассматриваем развёрнутые двугранные углы.

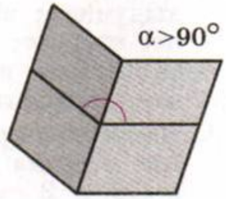


Рис. 144

Вопросы для самоконтроля

1. В чем аналогичны двугранные и плоские углы? А в чём их различия?
2. Как измеряют двугранные углы?
3. Какие плоскости называются взаимно перпендикулярными?
4. Приведите примеры предметов, похожих на двугранные углы.

ЗАДАЧИ

Рисуем

3.88. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Назовите грани его двугранного угла при ребре BC. б) Назовите линейный угол двугранного угла при ребре BC. в) Нарисуйте биссектрису названного вами линейного угла.

3.89. Нарисуйте четырёхугольную пирамиду $PABCD$ и плоскость, содержащую прямые AP и CP. Сколько двугранных углов с ребром AP при этом получилось? Назовите их грани.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

Работаем с формулой

I.1. На прямой даны два отрезка, которые пересекаются по отрезку. Пусть их длины a и b, длина их пересечения равна c, а длина их объединения равна d. а) Докажите, что $a + b = c + d$.

б) Пусть длины отрезков не меняются, а длина их пересечения увеличивается. Что происходит с длиной их объединения? в) Пусть длины отрезков не меняются, а длина их объединения увеличивается. Что происходит с длиной их пересечения?

Находим величину

I.2. Отрезок длиной 10 см надо разбить точками на три отрезка и при этом: а) каждый следующий отрезок на 1 см длиннее предыдущего; б) каждый следующий отрезок в 2 раза длиннее предыдущего; в) первый отрезок равен третьему и в 2 раза длиннее второго; г) третий отрезок на 1 см длиннее первого и в 2 раза длиннее второго. Вычислите длины этих отрезков. Составьте сами похожие задачи.

I.3. Нарисуйте прямую, на ней отрезок AB и точку D — середину AB. Вне отрезка AB на прямой взята точка C. а) Пусть $CA = 10$ см и $CB = 2$ см. Вычислите расстояние CD. б) Пусть $CA = 3$ см и $CD = 5$ см. Вычислите длину CB. в) Решите задачи «а» и «б» в общем виде.

I.4. а) На прямой отложите отрезки $AB = 4$ см и $BC = 2$ см. Вычислите AC. б) Постройте теперь на этой прямой точку D, такую, что $BD = 6$ см. Вычислите AD. Сколько решений имеет задача?

I.5. На прямой расположены по порядку точки A, B, C так, что $AB = 2$, $BC = 1$. Точка X движется по этой прямой в одном направлении. Сколько раз во время этого движения расстояние от точки X до одной из точек A, B, C будет равно сумме расстояний от точки X до двух других?

I.6. По прямой в одном направлении движутся точки A и B: точка A со скоростью v_1, а точка B со скоростью v_2. С какой скоростью движется середина отрезка AB?

I.7. На прямой находятся две точки A и B. Каждая из них движется со скоростью v. В начальном положении $AB = s$. Чему равно AB спустя время t?

I.8. Дан отрезок AB длиной 2 м. По нему движется точка X со скоростью 1 м/с. Она начинает движение в точке A, доходит до точки B, затем движется к A, доходит до A, после чего всё повторяется. а) На каком расстоянии от точки A она будет через 5 с? 10 мин? 1 ч? б) Через какое время точка X первый раз окажется в середине отрезка AB? А в десятый раз? в) Точка X двигалась 3 мин. Какое время она была ближе к точке A, чем к точке B?

I.9. По отрезку AB длиной 3 м движутся две точки K и L. Точка K начинает движение со скоростью 1 м/с из A, доходит до B, поворачивает обратно, доходит до A и т. д. Точка L начинает движение со скоростью 2 м/с из B, доходит до A, поворачивает обратно и т. д. а) Какое расстояние будет между этими точками через 6 с? 10 мин? 1 ч? б) Сколько раз встретятся точки K и L за 3 мин? в) Сколько раз за 3 мин расстояние между ними будет равно 3?

I.10. На одной прямой расположены два отрезка. а) Первый отрезок длиной 1 м движется мимо другого неподвижного отрезка длиной 2 м со скоростью 1 м/с. Сколько времени они будут иметь общие точки? б) Эти отрезки движутся в противоположных направлениях со скоростями 1 м/с и 2 м/с. Сколько времени они будут иметь общие точки?

I.11. На прямой находится точка O и отрезок AB длиной 1 м. Отрезок стал двигаться по прямой со скоростью 1 см/с, и одновременно по отрезку из конца в конец стала двигаться точка X со скоростью 1 см/с. Полагая, что: 1) в начальный момент времени точка A совпадала с точкой O, 2) точка X начинает движение от A к B, и 3) отрезок AB движется по лучу AB, вычислите: а) чему будет равно расстояние OX через 10 с; б) через какое время расстояние OX будет равно 3 м? Рассмотрите и другие возможности в этой задаче.

I.12. На окружности длиной 1 м рассматриваются две дуги. а) Пусть длина одной из них равна 0,5 м, длина другой равна 0,6 м, а длина дуги, являющейся их пересечением, равна 0,1 м. Чему равна длина их объединения? А какой будет результат, если их пересечение не является дугой? б) Составьте сами какую-либо задачу про две дуги одной окружности. в) Пусть длина каждой дуги равна 0,9 м. Можно ли оценить длину пересечения и объединения этих дуг?

I.13. а) На окружности даны точки A и B. На одной из полученных дуг этой окружности взята её середина — точка C и на другой из дуг взята её середина — точка K. Какую часть от всей окружности составляет дуга KC? б) Теперь возьмём на одной окружности три точки — назовём их (по часовой стрелке) A, B, C. Пусть точка K — середина дуги AB, дуга CA составляет $\frac{1}{4}$ окружности, а дуга CB составляет $\frac{1}{3}$ окружности. Какую часть от всей окружности составляет дуга CK? в) Придумайте сами похожую задачу.

I.14. Пусть дуга AB окружности разбита точкой C на две дуги. Её часть дуга CA составляет 0,1 окружности, а другая её часть — дуга CB — 0,6 окружности. Пусть точка P — середина дуги AC, а точка H — середина дуги CB. а) Какую часть от дуги AB составляет дуга PH? б) Сможете ли вы ответить на тот же вопрос, если будет известно только то, что дуга AB составляет 0,7 окружности? в) Составьте сами задачу на этот же сюжет.

I.15. Даны три прямых угла. Первый со вторым имеют общий угол, равный 45°, а второй с третьим — общий угол, равный 60°. Имеют ли общую часть первый и третий углы, и если имеют, то чему она равна?

I.16. Пусть $\angle ab = 120°$. а) Луч c лежит внутри данного угла и образует со стороной a угол 80°. Вычислите угол между лучом c и биссектрисой данного угла. б) Выполните то же задание, что и в пункте «а», если луч c лежит вне данного угла. в) Решите задачи «а», «б» в общем виде для произвольных значений углов: $\angle ab = \alpha$ и $\angle ac = \beta$.

I.17. В данном угле ab, равном 160°, проведена биссектриса c. а) Чему равен угол между биссектрисами углов ac и cb? б) А какой будет результат, если луч c не будет биссектрисой данного угла, а просто выходит из его вершины и проходит внутри? в) Теперь пусть угол между биссектрисами полученных углов равен 80°. Какой угол образует в этом случае луч c со сторонами угла?

I.18. Луч c — биссектриса угла ab. а) Луч d образует с лучом a угол 40°, а с лучом b угол 140° и находится вне данного угла. Какой угол образует луч d с биссектрисой c? А какой угол образует луч d с биссектрисой c, если находится внутри данного угла?

Ищем границы

I.19. Каково наибольшее и наименьшее число частей, на которое можно разбить плоскость: а) двумя окружностями; б) тремя окружностями; в) четырьмя окружностями? Как выглядит аналогичная задача в пространстве?

I.20. На сколько частей могут разбить квадрат: а) две его хорды; б) три его хорды? в) Каково наибольшее и наименьшее число частей, на которое можно разбить квадрат четырьмя хордами?

I.21. Из данной точки на плоскости проводятся лучи и рассматриваются углы между соседними лучами. а) Каково число таких лучей, если все получившиеся углы тупые? б) Какое наименьшее число таких лучей необходимо провести, чтобы все получившиеся углы были острыми? в) Какое наименьшее число таких лучей необходимо провести, чтобы хотя бы два получившихся угла были прямыми? г) Какое наименьшее число таких лучей необходимо провести, чтобы среди получившихся углов хотя бы один был острым, хотя бы один был прямым и хотя бы один был тупым? д) Составьте сами похожие задачи.

Планируем

I.22. Как расположить на листе бумаги шесть точек так, чтобы общее число прямых, проходящих через каждые две из них, равнялось: а) 15; б) 11; в) 8; г) 6?

I.23. а) С помощью транспортира постройте угол, равный 70°. Теперь уберите транспортир и придумайте, как построить угол, равный 10°. б) С помощью транспортира постройте угол, равный 17°. Теперь уберите транспортир и придумайте, как построить угол, равный 7°. в) С помощью транспортира постройте угол, равный 65°. Теперь уберите транспортир и придумайте, как построить угол, равный 20°. (При этом вы можете пользоваться циркулем и линейкой.)

Доказываем

I.24. Углы ab и bc смежные, луч p — биссектриса угла ab. Луч q идёт внутри угла bc из его вершины. Докажите, что q — биссектриса угла bc, если угол pq прямой.

I.25. Четыре луча на плоскости, идущие из одной точки, разбивают плоскость на углы, два из которых прямые и не смежные друг другу. Докажите, что биссектрисы двух других углов составляют прямую.

Исследуем

I.26. Нарисуйте три прямые одной плоскости так, чтобы пересекались любые две из них, причём в разных точках. На сколько частей разбилась плоскость этими прямыми? Теперь проведите четвёртую прямую так, чтобы число получившихся частей плоскости стало по возможности наибольшим. Чему равно это число? А теперь проведите пятую прямую с тем же условием. Подсчёт получившихся частей вести всё труднее, но можно заметить некую закономерность. Попытайтесь это сделать, а затем и доказать её.

I.27. Три луча на плоскости, идущие из одной точки, разбивают плоскость на три равные друг другу угла. Как построить биссектрисы этих углов? А если лучей пять?

I.28. Про два угла известно следующее: 1. У них есть общая сторона. 2. Их стороны лежат на двух данных прямых. 3. Сторона одного является продолжением стороны другого. 4. Они равны. Следует ли из какого-либо из утверждений, что данные углы вертикальные? А из каких-либо двух из этих утверждений?

I.29. а) Нарисуйте четыре луча так, чтобы два из них были биссектрисами образовавшихся при этом углов. б) Можете ли вы нарисовать их так, чтобы каждый из них был биссектрисой какого-либо из образовавшихся углов? в) Сможете ли вы нарисовать так три луча?

I.30. Два угла величиной 40 и 50° имеют общую сторону. а) Какой угол могут образовывать другие их стороны? б) Ответьте на тот же вопрос, если даны углы величиной 140° и 150°. в) Решите задачу в общем виде, когда величины данных углов α и β.

I.31. Федя и Вася, каждый у себя в тетради, нарисовали отрезок AB, взяли внутри его точку O и построили прямой угол KOM. Потом они занялись углами AOK и BOM. Федя установил, что их сумма равна 90°, а Вася настаивал на том, что их разность 90°. Кто из них прав?

I.32. Нарисуйте две взаимно перпендикулярные прямые. а) Возьмите точку вне этих прямых и постройте симметричную ей относительно первой прямой, а затем симметричную полученной точке относительно второй прямой. Какое наблюдение можно сделать? Как его обосновать? б) Теперь соедините любые две точки, лежащие на этих прямых, и проделайте аналогичную работу с полученным отрезком. Ответьте на те же вопросы.

Применяем геометрию

I.33. Возьмите три одинаковых куска проволоки и сделайте из них три кольца так, чтобы конструкция из трёх колец не распадалась, но она распадалась бы на два кольца, если из неё удалить любое из колец.

I.34. Нарисуйте окружность с помощью монетки. Уберите монетку. Сможете ли вы найти её центр?

I.35. Представьте себе, что вы катаете шар на бильярдном столе. И не просто катаете, а наблюдаете за его траекториями. Ударившись о борт, шар отражается под тем же углом, который он составлял с этим бортом до удара. Пусть для простоты стол квадратный, а шар пущен из середины стороны. Какая будет у него траектория? Придумайте другие варианты сами.

I.36. Две черепахи находятся на разных концах одного диаметра круглого озера, длина берега которого равна 100 метров. Они поползли навстречу друг другу по берегу озера. Первая черепаха за сутки проползает 2 м, а вторя за сутки проползает 3 м. Рассояние между черепахами будем измерять по кратчайшей дуге границы. а) Какое расстояние будет между черепахами через неделю? через 2 недели? б) Через какое время расстояние между ними станет снова наибольшим?

I.37. а) Сколько градусов содержится между двумя минутными делениями циферблата часов? б) Сколько градусов образуют между собой стрелки часов, когда они показывают такое время: 13:00, 15:30, 14:45, 10:55, 21:01? в) Назовите какое-либо время, когда стрелки часов образуют угол, равный такому числу градусов: 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 180.

I.38. Стрелки часов могут совпадать, а могут быть противоположно направлены. Между двумя этими положениями проходит некоторое время. За это время стрелки образуют как острый, так и тупой угол. Какой из этих промежутков времени больше: время, в течение которого они образуют острый угол, или время, в течение которого они образуют тупой угол?

I.39. Измерьте, какой угол образуют между собой указательный и средний пальцы одной руки при максимальном отклонении друг от друга. (Запомните это число — может пригодиться.)

I.40. Представьте себе компас. Какой угол образуют между собой такие направления: а) С и СВ; б) Ю и ЮЗ; в) В и СЗ; г) ЮВ и СВ; д) ЮЗ и СВ; е) СЗ и СВ?

Применяем компьютер

Решая задачи этой рубрики с помощью компьютера, используйте, например, среду «Живая математика», которую можно найти по адресу: http://www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276.

I.41. Постройте четыре прямые и, перемещая их, получите расположение с наибольшим количеством пересечений.

I.42. Отрезок AB разбит точкой C на два отрезка. Найдите расстояние между их серединами. Постройте модель решения задачи и проверьте правильность ответа для различных начальных данных, перемещая точки A и B.

I.43. Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов? Постройте модель решения задачи и проверьте правильность ответа для различных начальных данных, изменяя положение луча, общего для двух смежных углов.

Глава II

Треугольники

Содержание главы I — это «геометрия прямой», самые начала «геометрии окружности» и «геометрия углов». В главе II мы начинаем изучать «геометрию треугольника». Простейший из многоугольников — треугольник играет в геометрии особую роль. За несколько тысячелетий геометры очень подробно изучили треугольник, а «геометрия треугольника» стала самостоятельным разделом элементарной геометрии. Её мы начнём изучать в главе II, а затем продолжим её изучение в 8 классе.

§ 4. Первые теоремы о треугольниках

4.1. О теоремах

Мы уже начали доказывать утверждения о свойствах геометрических фигур (например, мы доказали в п. 3.6, что вертикальные углы равны). Те утверждения, которые доказывают, как мы уже говорили во введении, называются **теоремами**. Геометрия фактически и состоит из теорем и их доказательств (опирающихся на аксиомы и определения), а также разнообразных задач. Но слово *теорема* к уже доказанным утверждениям мы пока не применяли. Мы начнём его использовать, доказывая теоремы о треугольниках. Как вы убедитесь, вся (или почти вся) геометрия основывается на теоремах о треугольниках.

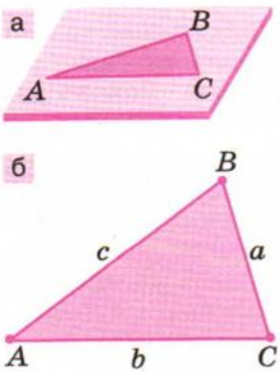


Рис. 145

4.2. Элементы треугольника

Приступая к изучению треугольников, напомним определения основных связанных с ними понятий. Во-первых, напомним, что любые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, являются **вершинами** треугольника ABC — части плоскости, ограниченной тремя отрезками AB, BC, AC (рис. 145). Знак $\triangle$ заменяет слово *треугольник*: когда написано $\triangle ABC$, читаем *треугольник* ABC.

Отрезки AB, BC, CA называются **сторонами треугольника** ABC, а углы между ними — **углами треугольника** ABC. Говорят, что угол A треугольника ABC **заключён**

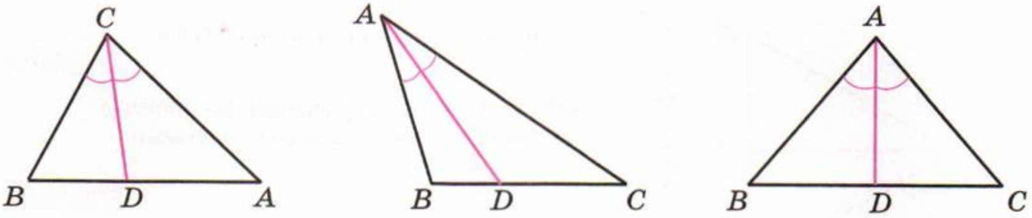


Рис. 146

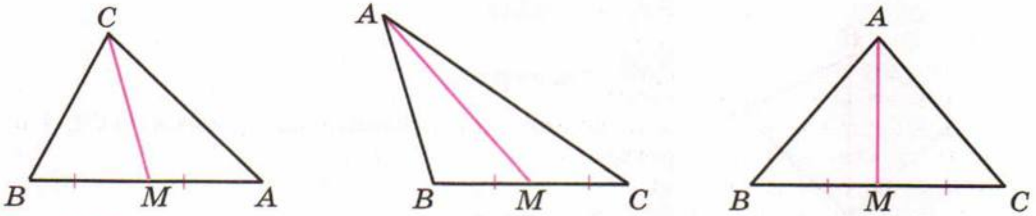


Рис. 147

между сторонами AB и AC. Так же говорят и об углах B и C.

В треугольнике ABC против вершины A лежит сторона BC. И наоборот, против стороны BC лежит угол A. Про вершину A и угол A говорят, что они **противолежащие стороне** BC. И о стороне BC говорят, что она **противолежащая** (или **противоположная**) вершине A и углу A. Сторону BC, противолежащую углу A, часто обозначают буквой a, сторону AC обозначают буквой b, а сторону AB — буквой c.

Углы A и B в треугольнике ABC называют **прилежащими к стороне** AB. Точно так же углы B и C — прилежащие к стороне BC, а углы C и A — прилежащие к стороне CA.

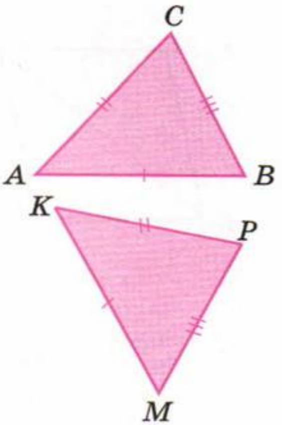


Рис. 148

Глядя на рисунок 146, вспомните, что называют биссектрисой треугольника.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны (рис. 147). У каждого треугольника три медианы.

Напомним, что равными мы назвали треугольники, у которых соответственные стороны равны. Это значит, например, что $\triangle ABC = \triangle KMP$, если $AB = KM$, $AC = KP$, $BC = MP$ (рис. 148).

С **Справка словесника.** Обратите внимание на то, что слова *медиана, медиатор, медик* однокоренные. Они происходят от слова *медиум* — посредник, средний. Медиатор — предмет, позволяющий музыканту (например, гитаристу) извлекать звук из своего музыкального инструмента; медик — врач, с помощью которого происходит исцеление больного.

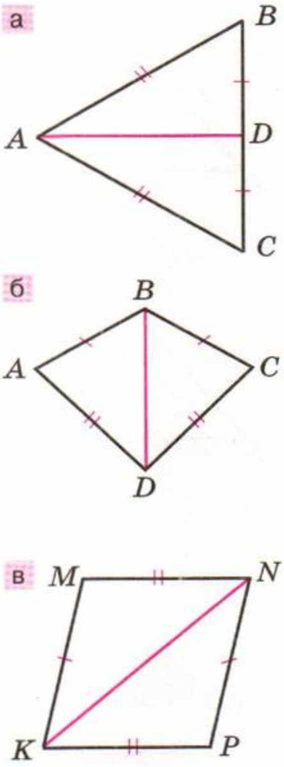


Рис. 149

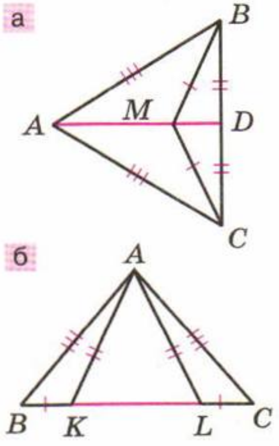


Рис. 150

Вопросы для самоконтроля

1. Какие элементы треугольника вы знаете?
2. Какие треугольники называют равными?

ЗАДАЧИ

Смотрим

4.1. Какие треугольники на рисунках 149, 150 равны?

Рисуем

4.2. Нарисуйте тетраэдр $ABCD$. Перечислите пары его граней, имеющих общую сторону. Назовите его грани, в которых есть: а) угол с вершиной A; б) сторона BC. Назовите его грани, имеющие общую вершину C.

4.3. Для каждой из граней тетраэдра $ABCD$, содержащих вершину C, определите: а) между какими сторонами заключён угол с вершиной C; б) какая сторона является противоположной вершине C.

Строим

4.4. Нарисуйте треугольник. Постройте все его медианы. Что вы заметили?

4.3. Первый признак равенства треугольников

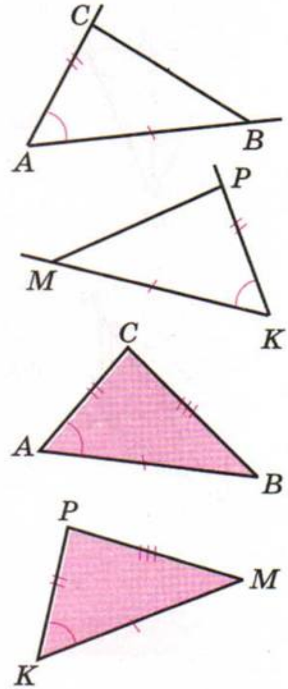
В дальнейшем при решении задач и доказательствах теорем очень важно нам будет увидеть, распознать равные между собой треугольники. (Вы, наверное, уже поняли это, решая задачи.) И не только их увидеть, но и доказать, что они равны. Хорошо, если стороны в рассматриваемых треугольниках соответственно равны. Тогда треугольники равны по определению. А если это не известно? Тогда применяют признаки равенства треугольников. Первый из этих признаков мы найдём, вникнув в аксиому о свойстве равных углов (п. 3.2). Согласно ему от равных углов соответственные хорды отсекают равные треугольники (рис. 151). Эта аксиома приводит нас к важной теореме.

Теорема 1 (*первый признак равенства треугольников*). **Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Завершим обсуждение первого признака равенства треугольников таким вопросом: а можно ли в формулировке теоремы 1 говорить об углах без слов «заключённый между ними» и тем самым упростить формулировку? Подумайте над ответом на этот вопрос и проверьте свои размышления, глядя на рисунок 152.

Вернёмся теперь к формулировке теоремы 1. Она состоит из двух частей. Первая часть начинается словом «Если...». В ней говорится о том, что **дано**. Эта часть называется **условием теоремы**. Вторая часть формулировки теоремы начинается словом «то...». В ней говорится о том, что **надо доказать**. Вторая часть формулировки теоремы называется её **заключением**.

Не все теоремы формулируются в таком виде. Например, теорема, что вертикальные углы равны, высказана в другом виде для простоты. Но и в ней можно выделить условие и заключение, использовав оборот «если... то...». Попробуйте это сделать.



Если $\angle A = \angle K$, $AB = KM$ *и* $AC = KP$, *то* $\triangle ABC = \triangle KMP$.

Рис. 151

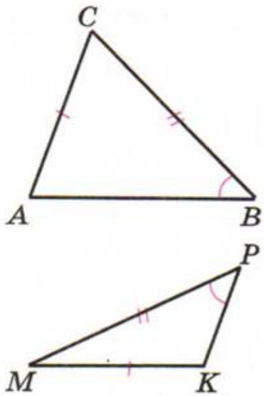


Рис. 152

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит первый признак равенства треугольников?
2. На чём основан первый признак равенства треугольников?
3. Как устроена теорема 1? В чём состоит её условие, а в чём — заключение?
4. Приведите пример утверждения, которое имеет такой же вид, как теорема 1.
5. Приведите пример утверждения, которое имеет другой вид, нежели теорема 1.

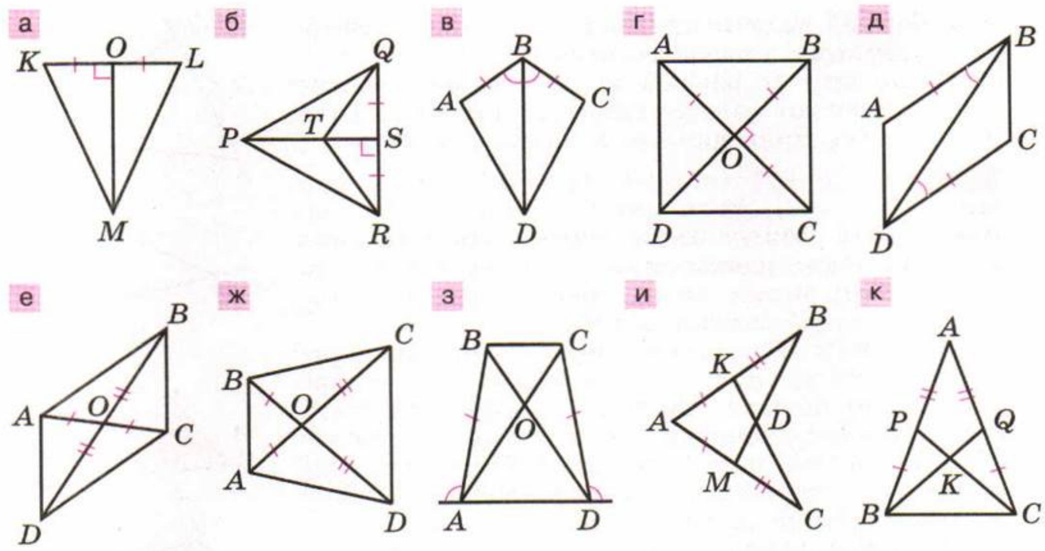


Рис. 153

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

Докажите такие теоремы:

4.5. Если два отрезка центрально-симметричны, то они равны.
4.6. Если два треугольника центрально-симметричны, то они равны.

Смотрим

4.7. На рисунке 153 укажите равные треугольники.

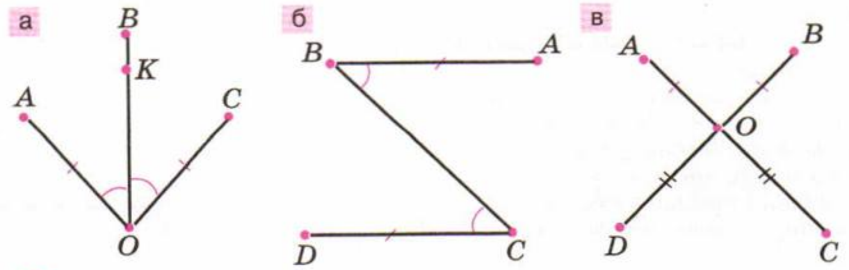


Рис. 154

4.8. Между какими точками, обозначенными на рисунке 154, равные расстояния?

4.9. На рисунке 155 изображён куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Он разбит на пирамиды. Назовите вершину и основания этих пирамид. Есть ли у них равные грани?

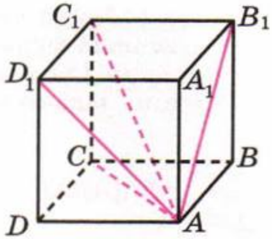


Рис. 155

4.4. Равенство соответственных углов равных треугольников

Вспомните, что первое представление о равенстве двух треугольников вы получили, совмещая эти треугольники наложением. При таком наложении у этих треугольников совместятся все их соответственные элементы: стороны, углы, медианы, биссектрисы. Поэтому у равных треугольников равны не только их соответственные стороны, но и любые соответственные элементы. Например, *в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.*

Но ведь реально не всегда один треугольник можно совместить с другим, равным ему треугольником. (Приведите примеры.) А в определении равенства треугольников ни о чём, кроме как о равенстве их сторон, не говорилось. Поэтому равенство остальных соответственных элементов равных треугольников нам придётся доказывать. При этом мы можем опираться только на определения, аксиомы или уже доказанные утверждения. Сделаем это для углов равных треугольников.

Сделать это можно, вспомнив определение равенства углов (п. 3.2). Согласно ему из равенства соответственных хорд двух углов вытекает равенство этих углов (рис. 156, а). Здесь это определение приводит нас к важной теореме.

Теорема 2 (*о равенстве углов равных треугольников*). **Если два треугольника равны, то равны и углы этих треугольников, лежащие против равных сторон.**

Более кратко эту теорему можно сформулировать и так: *в равных треугольниках соответственные углы равны.*

□ Действительно, если $\triangle ABC = \triangle KMP$, то углы A и K имеют равные соответственные хорды BC и MP (рис. 156, б), а тогда по определению равных углов (п. 3.2) $\angle A = \angle K$. ■

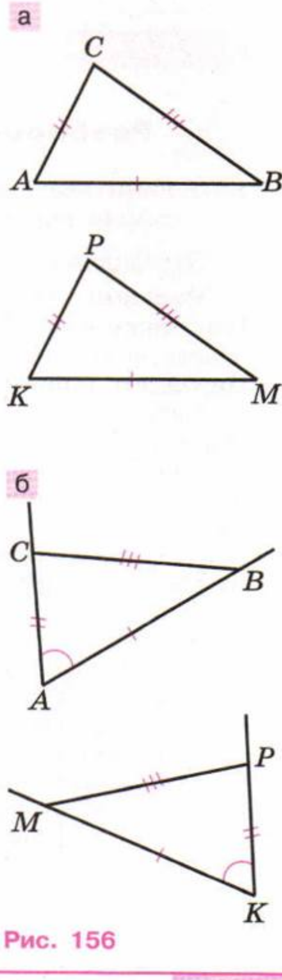


Рис. 156

Попробуйте теперь доказать, что в равных треугольниках соответственные медианы равны между собой. Если у вас возникнут затруднения (да и для проверки своего доказательства), разберитесь в решении задачи 4.10.

Вопросы для самоконтроля

1. Как проверить, равны ли два треугольника?
2. Что следует из равенства двух треугольников?
3. Какой вы знаете теперь признак равенства углов?

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

4.10. Если два треугольника равны, то их соответственные медианы также равны.

Эту задачу мы решим вместе с вами и обсудим её решение.

Решение. Прежде всего надо понять, о чём идёт речь в задаче. Что такое соответственные медианы в равных треугольниках? О соответственных сторонах и соответственных углах мы уже говорили. Перейдём теперь к медианам.

Рассмотрим два равных треугольника ABC и KMP (сделайте рисунок!). На стороне BC отметим её середину — точку D, а на равной ей стороне MP треугольника KMP — её середину, точку L (рис. 157). Проведём медианы AD и KL. Они и будут соответственными.

Как же доказывают равенство двух отрезков AD и KL? Для этого обычно ищут равные треугольники, сторонами которых являются эти отрезки. Если окажется, что они лежат против равных углов, то и сами будут равны. (Это следует из признака равенства треугольников.) Попробуем проделать всё это.

Сразу видно, что медианы AD и KL являются сторонами треугольников ABD и KML. Но нам этого мало, нам нужно, чтобы эти треугольники оказались равными. Так ли это? Посмотрим на их соответственные стороны. Стороны AB и KM равны по условию как соответственные стороны равных треугольников ABC и KMP. Отрезки BD и ML равны как половины равных отрезков BC и MP. Осталось найти в этих треугольниках равные углы. Вы их, наверное, видите (на хорошем рисунке), но равенство таких углов надо доказать, вывести из предыдущих утверждений — аксиом или теорем.

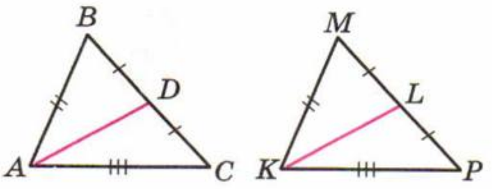


Рис. 157

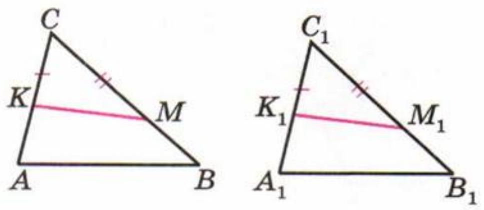


Рис. 158

Это можно сделать для углов B и M. Они ведь лежат не только в треугольниках ABD и KML, но и в равных треугольниках ABC и KMP. И в этих равных треугольниках они лежат против равных сторон AC и KP. Поэтому по теореме 2 равны углы B и M.

Вот теперь всё получилось. В треугольнике ABD угол B заключён между сторонами BA и BD, а в треугольнике KMP равный углу B угол M заключён между сторонами MK и ML, соответственно равными сторонам BA и BD. Поэтому треугольники ABD и KML равны и $AD = KL$. Но это и требовалось доказать.

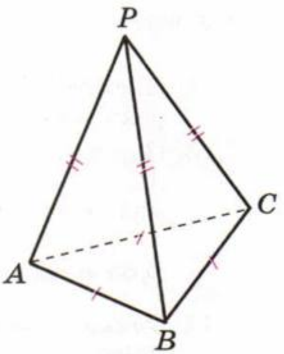


Рис. 159

Решив задачу, не спешите с ней расставаться. Задайте себе несколько вопросов. Первый — нельзя ли решить её иначе? В нашей задаче вместо треугольников ABD и KML можно было рассмотреть и другую пару треугольников. Какую? Каким тогда было бы доказательство? Может быть, оно более простое?

Попытайтесь решить более общую задачу. Например, такую: докажите, что в равных треугольниках соответственные хорды равны (рис. 158). А что назвать хордой треугольника? И какие хорды в равных треугольниках считать соответственными?

И ещё. Мы находились внутри треугольника. А что будет, если «выйти за его пределы», т. е. отложить соответственно равные отрезки на продолжении сторон треугольника и соединить их концы? Мы получим те же результаты?

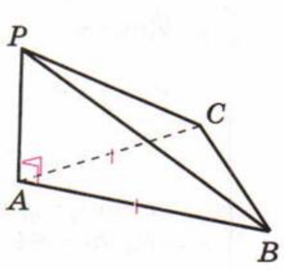


Рис. 160

Смотрим

4.11. Укажите пары соответственно равных углов в равных треугольниках на рисунке: а) 149; б) 150; в) 159; г) 160.

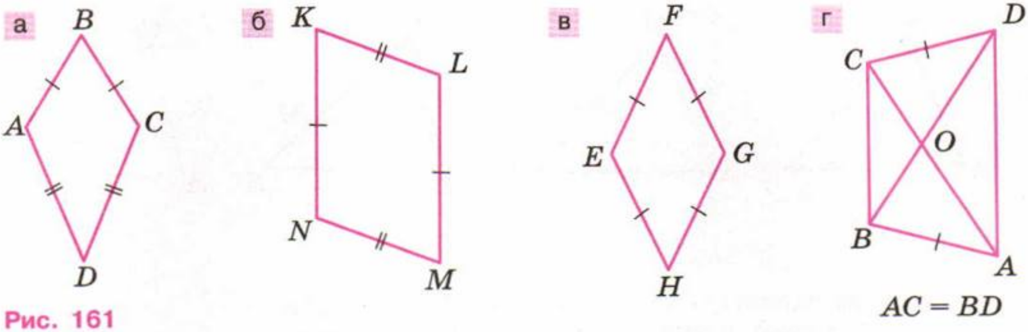


Рис. 161

4.12. Посмотрите на рисунок 161 и скажите, какие углы в четырёхугольнике равны.

4.13. Нарисуйте тетраэдр $ABCD$. Пусть у этого тетраэдра $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Укажите на рисунке равные углы на гранях этого тетраэдра.

Доказываем

4.14. Точка C лежит на биссектрисе угла O, а точки A и B — на сторонах угла O, причём $OA = OB$. Докажите, что: а) $CA = CB$; б) $\angle OCA = \angle OCB$; в) $AB \perp OC$.

4.15. Постройте окружность с центром O и две любые равные её хорды AB и CD. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.

4.16. Нарисуйте окружность и её диаметр AB. Возьмите две точки окружности, равноудалённые от точки A. Докажите, что эти точки равноудалены и от точки B.

Исследуем

4.17. Нарисуйте окружность, а в ней диаметр AB и две равные хорды AK и BP. Есть ли ещё одна пара равных хорд с концами в точках A, B, K, P?

4.5. Теорема о внешнем угле треугольника. Классификация треугольников

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с углом треугольника (рис. 162).

Теорема 3 (*о внешнем угле треугольника*). **Внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника.**

Дано: $\triangle ABC$, $\angle BCM$ — внешний угол треугольника ABC (рис. 163).

Доказать: $\angle BCM > \angle B$ и $\angle BCM > \angle A$.

Доказательство. Если доказательства предыдущих двух теорем не требовали дополнительных построений, то для доказательства теоремы 3 следует выполнить дополнительные построения. Будем доказывать неравенство $\angle BCM > \angle B$. Из вершины A проведём медиану AO треугольника ABC и продолжим её за точку O на отрезок OK, равный отрезку AO (рис. 164, а). Проведём отрезок KC и рассмотрим два треугольника AOB и KOC (рис. 164, б). В этих треугольниках, во-первых, $BO = OC$ (так как AO — медиана), во-вторых, $AO = OK$ (по построению) и, в-третьих, $\angle AOB = \angle KOC$ (как вертикальные). Поэтому $\triangle AOB = \triangle KOC$ (по теореме 1 — первому признаку равенства треугольников). В равных треугольниках AOB и KOC равны соответственные углы (по теореме 2). Углу B в треугольнике AOB соответствует угол KCO в треугольнике KOC. Поэтому $\angle B = \angle KCO$. Но угол KCO — часть угла BCM, а потому $\angle BCM > \angle KCO$. Заменив в последнем неравенстве угол KCO равным ему углом B, приходим к доказываемому неравенству $\angle BCM > \angle B$.

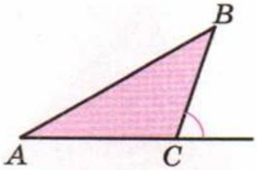


Рис. 162

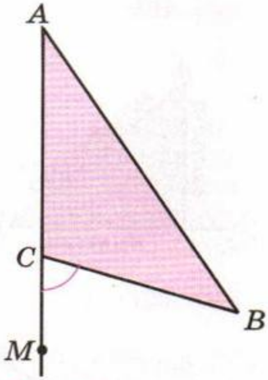


Рис. 163

Чтобы доказать неравенство $\angle BCM > \angle A$, рассмотрите угол, вертикальный углу BCM и тем самым равный этому углу, и проведите медиану BP (рис. 165). Повторите ещё раз проведённое доказательство. ■

Рисуя различные треугольники, вы, наверное, обратили внимание на то, что у треугольника может быть лишь один прямой или тупой угол. Теперь, опираясь на теорему о внешнем угле треугольника, мы можем это доказать и провести классификацию треугольников по углам. Перечислим возможные случаи.

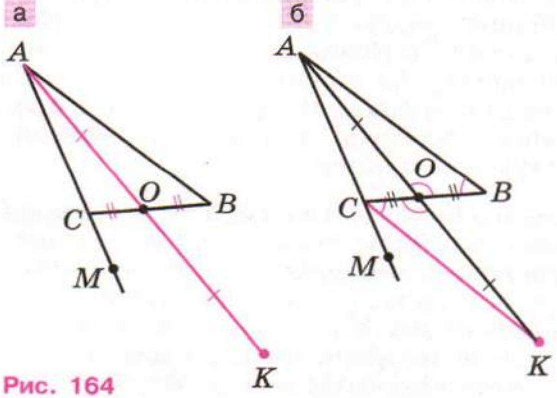


Рис. 164

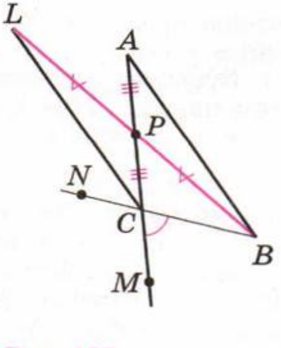


Рис. 165

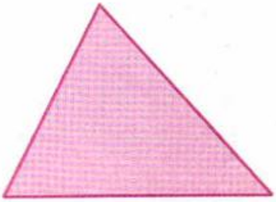


Рис. 166

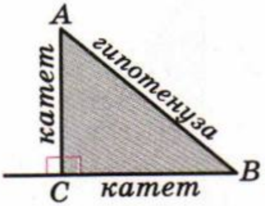
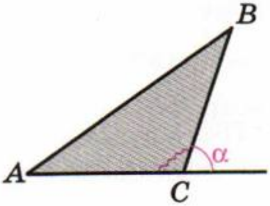


Рис. 167



α — острый,
$\angle A < \alpha$, $\angle B < \alpha$,
$\angle A$ и $\angle B$ — острые.

Рис. 168

Случай 1. Все три угла треугольника острые. Такой треугольник называется **остроугольным** (рис. 166).

Случай 2. Один из углов треугольника прямой. Тогда смежный с этим углом угол тоже прямой (рис. 167). Два других угла треугольника по теореме 3 меньше этого прямого угла. Следовательно, эти два угла острые.

Итак, **если один из углов треугольника прямой, то два других его угла острые.** Такой треугольник называется **прямоугольным**. Взаимно перпендикулярные его стороны называются **катетами**, а третья сторона — **гипотенузой**.

Случай 3. Один из углов треугольника тупой. Тогда угол, смежный с этим углом, острый (рис. 168). Два других угла треугольника по теореме 3 меньше этого острого угла. Следовательно, эти два угла острые.

Итак, **если один из углов треугольника тупой, то два другие его угла острые.** Такой треугольник называется **тупоугольным**.

Таким образом, все треугольники мы разбили на три класса по виду их углов, т. е. провели **классификацию** треугольников. Мы уже и раньше проводили классификацию, но не произносили этого слова. Например, во Введении мы классифицировали взаимное расположение двух плоскостей: возможны два случая — параллельные плоскости и пересекающиеся плоскости. И в дальнейшем мы часто будем классифицировать геометрические фигуры и их взаимное расположение. Проводя классификацию фигур, надо следить за тем, чтобы одна и та же фигура не попала в разные классы (как и ученики в школе), но обязательно попала бы в один из классов.

Обратите внимание на то, что классификация проводится и в других науках. Например, в ботанике, зоологии, грамматике, медицине и т. д. Приведите соответствующие примеры.

К **Комментарий.** С классификацией мы встречаемся в обыденной жизни часто. Например, вытирая вымытую посуду, мы можем расставить её так: в одно место поставить все тарелки, в другое — все чашки и т. д. Тем самым мы разложим всю посуду на группы, или, иначе, классифицируем её по назначению. Можно было бы ту же посуду распределить по-другому: в одно место фарфоровую, в другое — стеклянную, в третье — металлическую и т. д. Это была бы другая классификация — по сорту материала, из которого изготовлена посуда. Ясно, что если бы мы решили в один «класс» отправить все чашки, а в другой — предметы из фарфора, мы бы не получили классификации, так как могло бы оказаться, что у нас есть фарфоровая чашка, а в какой «класс» её отправить — непонятно.

Итак, классификация предметов (или объектов, как в геометрии, в нашем случае треугольников) — это такое разбиение их на группы, что, во-первых, каждый предмет (объект) входит в какую-нибудь группу и, во-вторых, никакой предмет не входит в две (или более) группы.

Справка словесника. Слово *катет* является однокоренным со словами *катастрофа, катакомбы, каталог, катаракта.* Корень *kata* греческого происхождения, означает *вниз, падать.* Интересно, что слово *катаракта* (помутнение глазного хрусталика) употреблялось раньше и в форме *катаракт* и имело два значения: водопад в горах, а также подвижные заслоны в крепостных воротах.

Слово *гипотенуза* переводится с греческого как *быть противоположным*, т. е. сторона треугольника, противоположная его прямому углу.

Вопросы для самоконтроля

1. Как построить внешний угол треугольника?
2. Сколько внешних углов имеет треугольник? Сколько из них могут быть неравными?
3. Расскажите о классификации треугольников.
4. Какие ещё классификации вам известны?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

4.18. Докажите, что два прямоугольных треугольника, имеющие соответственно равные катеты, равны.

4.19. Докажите, что сумма любых двух углов треугольника меньше $180°$.

Строим

4.20. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

Рассуждаем

4.21. Предложите классификации: а) многоугольников; б) углов; в) многогранников.

4.22. Приведите классификацию треугольников по сторонам.

4.23. Приведите примеры классификаций в различных науках.
4.24. Приведите примеры классификаций в быту.

Исследуем

4.25. Известно, что у треугольника два угла равны. Каким может быть такой треугольник и какие у него могут быть эти углы? А если у треугольника все три угла равны?

4.6. Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра

Напомним, что взаимно перпендикулярными называются прямые, лучи или отрезки, образующие прямой угол. **Перпендикуляр** AB, проведённый к прямой l, — это такой отрезок, один из концов которого (например, точка B) принадлежит прямой l и который образует с прямой l прямые углы (рис. 169). О перпендикуляре AB говорят также, что он **опущен из точки A на прямую l**. Точка B называется **основанием перпендикуляра AB**.

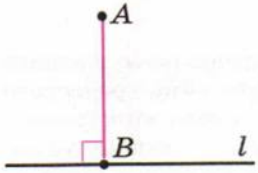


Рис. 169

Рисуя перпендикуляры, мы обычно используем чертёжный треугольник (рис. 170). Как провести с помощью циркуля и линейки через точку B перпендикуляр к прямой l, мы рассказали в п. 3.5, когда построили биссектрису развёрнутого угла (см. рис. 124). Как циркулем и линейкой *опустить перпендикуляр из точки A на прямую l, не проходящую через точку A,* мы расскажем в п. 5.2.

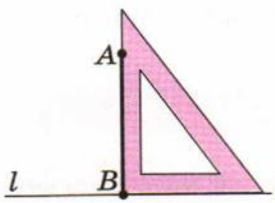


Рис. 170

Докажем, что *из любой точки A, не лежащей на прямой l, можно опустить лишь один, т. е., как говорят в математике, единственный, перпендикуляр AB на эту прямую.*

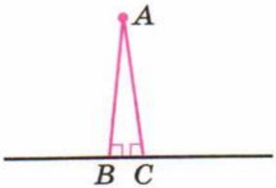
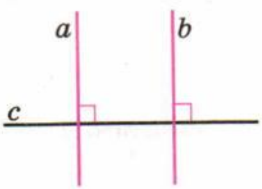


Рис. 171

□ Предположим, что из некоторой точки A на прямую l опущены два перпендикуляра AB и AC (рис. 171). Тогда в треугольнике ABC оказалось бы два прямых угла, что невозможно. Следовательно, предположение о двух перпендикулярах из одной точки, опущенных на одну прямую, ведёт к противоречию. Поэтому такой перпендикуляр лишь один. ■

Из утверждения о единственности перпендикуляра следует, что *на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны* (рис. 172).



Если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$.

Рис. 172

□ Действительно, если на плоскости две прямые a и b перпендикулярны прямой c, то пересекаться прямые a и b не могут. Если допустить, что они пересекаются в некоторой точке A, то оказалось бы, что из точки A на прямую c опущены два перпендикуляра. А это, как доказано, невозможно. Поэтому прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны. ■

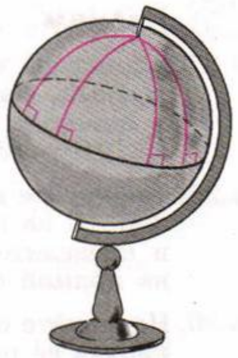


Рис. 173

К Комментарий *(о единственности перпендикуляра)*. В *сферической геометрии* из точки на «прямую» — большую окружность — не всегда опускается лишь один перпендикуляр. Например, из полюса глобуса на экватор опущено бесконечно много перпендикуляров — полумеридианов (рис. 173).

С Справка словесника. Слово *перпендикуляр* происходит от французского *pendre*, что означает *висеть*. Таким образом, перпендикуляр — это отвес.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы знаете о перпендикуляре?
2. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную прямую?
3. Какой признак параллельности прямых вы теперь знаете?

ЗАДАЧИ

Смотрим

4.26. Назовите перпендикуляры и прямые, на которые они опущены, изображённые на рисунке 174. Укажите пары равных треугольников на этом рисунке.

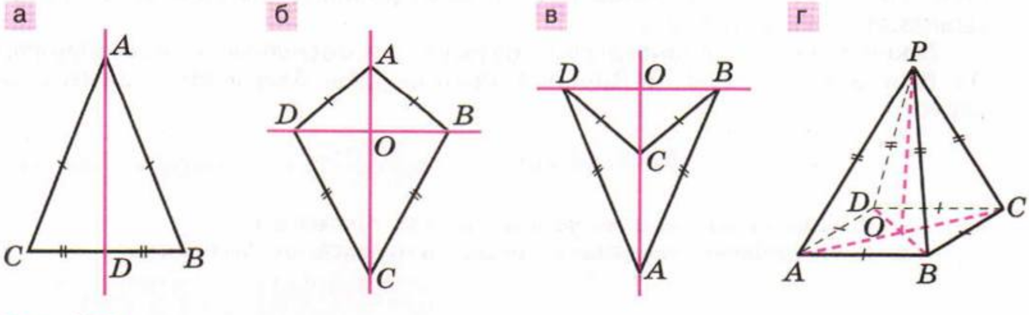


Рис. 174

Рисуем

4.27. Нарисуйте отрезок AB и через точку B проведите несколько прямых. Опустите из точки A перпендикуляры на эти прямые и измерьте расстояние от их оснований до середины отрезка AB. Что получилось?

4.28. Нарисуйте прямую a и точку A вне её. Нарисуйте перпендикуляр AB на прямую a. Возьмите на прямой a ещё одну точку C и проведите отрезок AC. Сравните отрезки AB и AC. Найдите на прямой a такую точку D, что $AC = AD$.

4.29. Нарисуйте окружность с центром в точке O и проведите какой-нибудь её радиус OA. Через точку A проведите прямую a, перпендикулярную отрезку OA. Что вы заметили?

Представляем

4.30. Нарисуйте прямую a, возьмите точку A вне прямой a и перпендикуляр AB на прямую a. Пусть X — точка прямой a. Как изменяется длина отрезка AX, когда длина отрезка BX возрастает?

4.31. Два отрезка перпендикулярны третьему отрезку. Каким может быть их взаимное расположение? Рассмотрите разные случаи, в том числе и пространственный.

4.7. Доказательство способом от противного. Второй признак равенства треугольников

Способ, который мы дважды применили в п. 4.6 для доказательства утверждений о единственности перпендикуляра и параллельности перпендикуляров, состоит в следующем:

Сначала мы сделали предположение (допущение), что доказываемое утверждение (например, что перпендикуляр единственный или что прямые параллельны) неверно (ложно). Это предположение привело нас к противоречию. Чтобы противоречие не возникало, остаётся лишь одна возможность — справедливость (истинность) доказываемого утверждения.

Такой способ доказательства называется способом от противного. Он был известен ещё в Древней Греции. Мы будем его применять часто.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит доказательство способом от противного?
2. Какие утверждения вы можете доказать способом от противного?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

4.32. Применим способ от противного для доказательства *второго признака равенства треугольников*: **если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

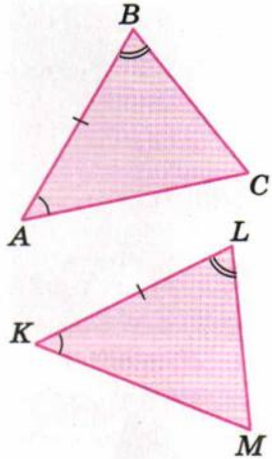


Рис. 175

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle KLM$, $AB = KL$, $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$ (рис. 175).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle KLM$.

Доказательство. Покажем, что соответственные стороны треугольников ABC и KLM равны, т. е. что, кроме равенства $AB = KL$, выполняются равенства $AC = KM$ и $BC = LM$. Снова применим способ от противного.

Допустим, что хотя бы одно из двух последних равенств не имеет места, например, что $AC \neq KM$. Отложим тогда на луче KM отрезок KP, равный отрезку AC, и построим треугольник KLP (рис. 176). Поскольку в треугольниках ABC и KLP равны углы A и K, а также заключающие их стороны ($AB = KL$ и $AC = KP$), то $\triangle ABC = \triangle KLP$ (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle B = \angle KLP$ (как соответственные углы равных треугольников). Поскольку $KP = AC$ и $AC \neq KM$, то точки P и M различны и лучи LM и LP различны. Поэтому от луча LK в одну полуплоскость отложены два угла, равные углу B: $\angle KLM$ и $\angle KLP$, а это противоречит аксиоме откладывания угла (см. п. 3.3).

Итак, допущение, что у треугольников ABC и KLM соответственные стороны не равны, ведёт к противоречию. Поэтому такие стороны равны, т. е. $\triangle ABC = \triangle KLM$. ■

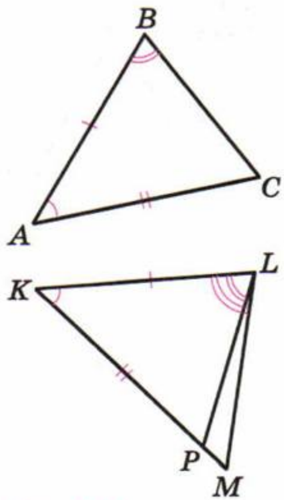
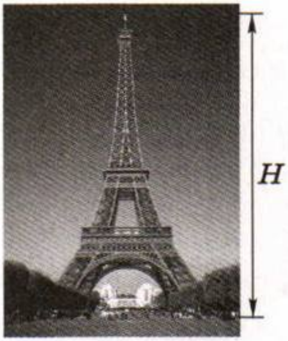


Рис. 176

4.8. Высота треугольника

Высоту реального предмета обычно измеряют длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на плоскость его основания. Если опустить такой перпендикуляр почему-либо трудно, то его длину заменяют длиной



$H = 300$ м

$h = 146{,}6$ м

Рис. 177

равного ему отрезка. Например, высота здания, высота пирамиды, глубина колодца и т. д. (рис. 177). Для плоских фигур тоже иногда определяют высоту: для треугольников и некоторых четырёхугольников.

<u>Высотой треугольника</u> называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или её продолжение (рис. 178). Высотой треугольника называют также и длину этого перпендикуляра. Каждый треугольник имеет три высоты.

Как видно на рисунках, высота треугольника может идти внутри треугольника (рис. 178, а), совпадать со стороной треугольника (рис. 178, б) и лежать вне треугольника (рис. 178, в).

Если высота совпадает со стороной треугольника, то этот треугольник прямоугольный (см. рис. 178, б), а высота является его катетом.

У прямоугольного треугольника две высоты — это его катеты, а третья высота, опущенная на гипотенузу, идёт внутри треугольника (рис. 179).

Наконец, если высота AM лежит вне треугольника ABC, то точка M лежит на продолжении стороны BC, например, за точку B (см. рис. 178, в). Тогда в прямоугольном треугольнике ABM угол ABM острый. Смежный с ним угол B треугольника ABC тупой.

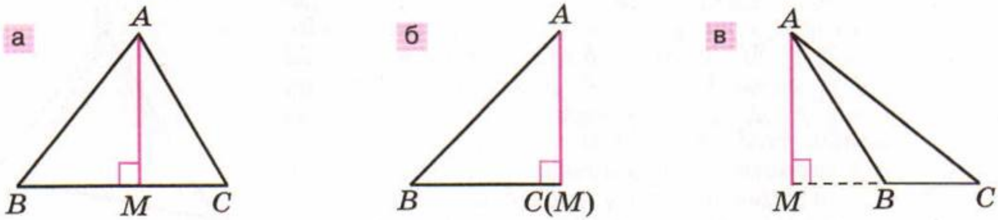


Рис. 178

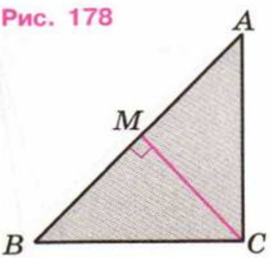


Рис. 179

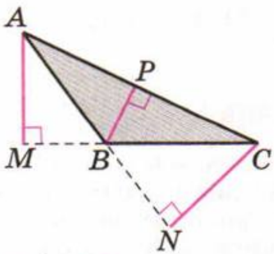


Рис. 180

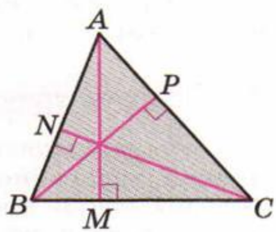


Рис. 181

Итак, если высота лежит вне треугольника, то треугольник тупоугольный. Две высоты тупоугольного треугольника идут вне треугольника, а его третья высота (опущенная на сторону, прилежащую к острым углам) идёт внутри треугольника (рис. 180).

В каждом треугольнике есть сторона, к которой прилегают два острых угла. Высота треугольника, проведённая к этой стороне, лежит внутри треугольника и разбивает его на два прямоугольных треугольника (см. рис. 178, а). В прямоугольном и тупоугольном треугольниках такая высота одна (см. рис. 179 и 180), а в остроугольном треугольнике все три его высоты лежат внутри треугольника (рис. 181).

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое высота предмета?
2. Что вы знаете о высоте треугольника?
3. Сколько высот у треугольника?
4. Всегда ли высота треугольника проходит внутри его?
5. Сколько высот треугольника может проходить вне треугольника?
6. Сколько высот треугольника может проходить по сторонам треугольника?

ЗАДАЧИ

Смотрим

4.33. Высоты каких треугольников изображены на рисунке 182?

4.34. Назовите несколько прямоугольных, остроугольных и тупоугольных треугольников, изображённых на рисунке 182.

Рисуем

4.35. Нарисуйте прямоугольный треугольник. Проведите его высоты.

4.36. Нарисуйте остроугольный треугольник. Проведите его высоты. Что вы заметили?

4.37. Нарисуйте тупоугольный треугольник. Проведите его высоты. Продолжите их до пересечения. Что вы заметили?

4.38. Постройте какой-нибудь треугольник, у которого биссектриса является и его высотой. Как вы думаете, какой у вас получился треугольник? Обоснуйте своё предположение.

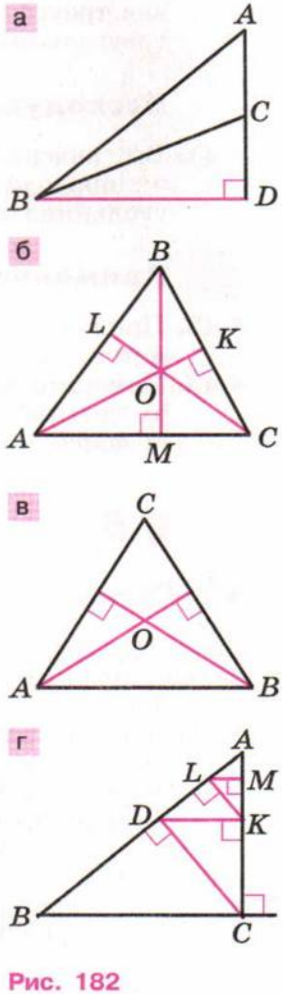


Рис. 182

Планируем

4.39. Федя нарисовал на доске остроугольный треугольник ABC и провёл его высоты из вершин A и B. Они пересеклись в точке P. Пришёл Вася и стёр всё, кроме точек A, B, P. Как Феде восстановить рисунок?

Доказываем

4.40. Докажите, что: а) в остроугольном треугольнике все высоты идут внутри треугольника; б) в тупоугольном треугольнике две высоты, проведённые из вершин острых углов, расположены вне треугольника, а высота из вершины тупого угла — внутри треугольника.

Исследуем

4.41. Вы, наверное, уже заметили, что все высоты треугольника или их продолжения проходят через одну точку. Для какого треугольника вы уже можете обосновать это утверждение?

Применяем геометрию

4.42. Придумайте, как измерить высоту различных домашних предметов: настольной лампы, кастрюли, бидона, тарелки и пр.

4.43. Измерьте высоту модели: а) прямоугольного параллелепипеда; б) четырёхугольной пирамиды; в) треугольной пирамиды; г) шара.

§ 5. Сравнение сторон и углов треугольника

5.1. Равнобедренный треугольник

Среди реально окружающих нас предметов в форме треугольников равнобедренные треугольники встречаются чаще всего. Поэтому они заслуживают специального изучения. Напомним, что треугольник называется **равнобедренным**, если две (хотя бы две) его стороны равны между собой (рис. 183). Эти две стороны называются его **боковыми сторонами**, а его третья сторона — **основанием равнобедренного треугольника**.

Когда говорят **«вершина равнобедренного треугольника»**, то имеют в виду ту его вершину, которая лежит против основания. А говоря о двух других вершинах, уточняют, что они принадлежат основанию.

Равнобедренный треугольник обладает несколькими важными свойствами. Вы, наверное, их уже заметили, когда рассматривали рисунок 183. Эти свойства сразу становятся ясными, если провести в таком треугольнике медиану к основанию. На рисунке 184 изображён равнобедренный треугольник ABC и его медиана AD. Она разбивает треугольник ABC на два равных треугольника ABD и ACD. Соответственные углы этих треугольников равны по теореме 2. В связи с этим получаем три равенства углов (они обозначены на рисунке 184).

Первое равенство — равенство углов 1 и 2 говорит о том, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Второе равенство — равенство углов 3 и 4 означает, что медиана равнобедренного треугольника, проведённая из его вершины, является биссектрисой треугольника.

Наконец, равенство смежных углов 5 и 6 означает, что медиана равнобедренного треугольника, проведённая из его вершины, перпендикулярна основанию, т. е. является высотой этого треугольника.

Глядя на рисунок 184 и вспоминая теорему 2, мы с вами доказали важную теорему о свойствах равнобедренного треугольника. Сформулируем её и запишем доказательство.

Рис. 183

Теорема 4 (*о свойствах равнобедренного треугольника*). **В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2)—3) медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.**

Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC$, AD — медиана (рис. 184).

Доказать: 1) $\angle B = \angle C$; 2) AD — биссектриса; 3) AD — высота.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABD и ACD. В них $AB = AC$ по условию и $BD = CD$ (так как AD — медиана). Сторона AD в этих треугольниках общая. По определению равенства треугольников $\triangle ABD = \triangle ACD$. Но тогда по теореме 1 соответственные углы этих треугольников равны. Поэтому:

$$1)\ \angle 1 = \angle 2;\ 2)\ \angle BAD = \angle CAD;$$
$$3)\ \angle ADB = \angle ADC.$$

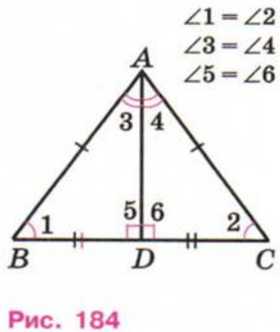


Рис. 184

Первое из этих равенств означает, что доказано первое утверждение теоремы. Второе равен-

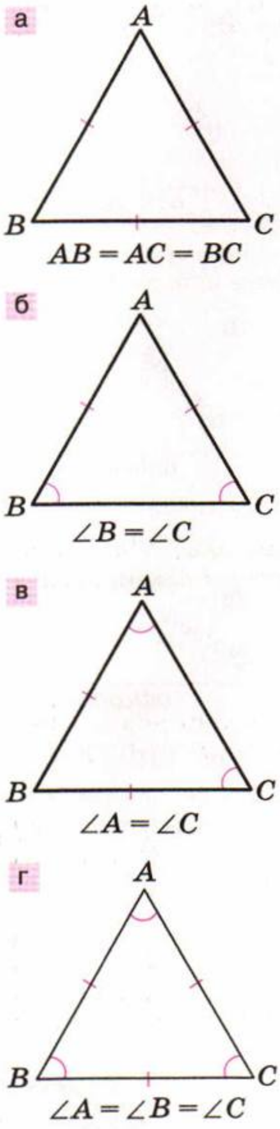


Рис. 185

ство означает, что AD — биссектриса. Третье равенство означает, что $AD \perp BC$. Следовательно, AD — высота. Все утверждения теоремы доказаны. ■

▲ ***О следствиях и частных случаях.*** Из предложений, которые мы выделяем как теоремы, довольно просто следуют (или вытекают) разнообразные утверждения, которые естественно называть **следствиями**. Чем больше следствий имеет теорема, тем она богаче содержанием.

Следствиями теорем являются и те утверждения, которые вытекают из них для более узкого класса фигур, для так называемых *частных случаев*. Например, признак равенства прямоугольных треугольников — по двум катетам — *это следствие теоремы 1 — первого признака равенства треугольников.* ▼

Равносторонний треугольник является частным случаем равнобедренного треугольника: все его стороны равны между собой (рис. 185, а). Поэтому любая из его сторон может считаться основанием. Считая основанием BC, получаем, что $\angle B = \angle C$ (рис. 185, б). Считая основанием AC, получаем, что $\angle A = \angle C$ (рис. 185, в), поэтому $\angle A = \angle B = \angle C$. Таким образом, мы установили следствие теоремы 5: **в равностороннем треугольнике все углы равны между собой** (рис. 185, г).

▲ ***О признаках и свойствах.*** Мы уже много раз имели дело с различными признаками и свойствами: знаем признак и свойство равных треугольников; нам известны признаки делимости чисел (на 2, 3, 5, 9 и др.). Поговорим подробнее о них.

Что такое свойство, известно: мяч — круглый, лёд — холодный, мёд — сладкий, в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Здесь мы перечислили некоторые свойства этих предметов.

С признаками мы тоже встречаемся часто. Например: если летним вечером комары толкутся стайками — быть завтра тёплой погоде (это признак хорошей погоды); если у малыша на лице сыпь, а в нижней части лица белое пятно треугольной формы, значит, у него скарлатина (это признак скарлатины). Найти признак какой-нибудь болезни — значит понять, как её можно распознать среди других болезней. (Обратите внимание: слово *признак* имеет корень *знак* — признак нам как бы подаёт знак, по которому мы можем определить объект.) ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Какие элементы равнобедренного треугольника вы знаете?
2. Какие свойства равнобедренного треугольника вы знаете?
3. Что в математике называют следствием?
4. Какие следствия можно получить из теоремы 4 для равностороннего треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.1. Докажите *признак равнобедренного треугольника*: если высота и медиана треугольника совпадают, то треугольник равнобедренный.

Смотрим

5.2. Перечислите равнобедренные треугольники с вершинами в точках, отмеченных на рисунке 186. А какие среди них равносторонние?

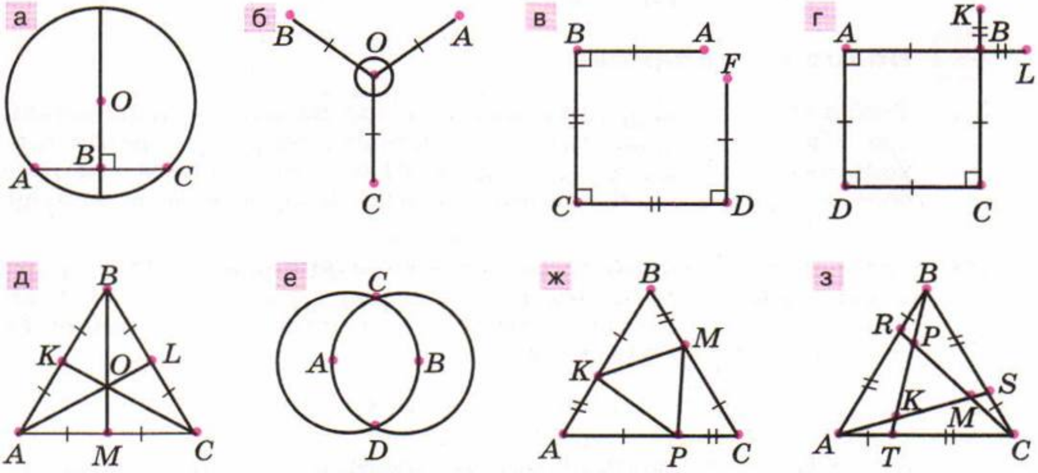


Рис. 186

Рисуем

5.3. Равнобедренные треугольники ABC, ACD, ABD, BCD лежат в одной плоскости. Сделайте рисунок.

5.4. Нарисуйте тетраэдр $ABCD$. а) $AB = BC = CD = DA$. Сколько равных друг другу углов в гранях этого тетраэдра? А сколько различных по величине? б) Ответьте на те же вопросы, если, кроме того, и $AC = BD$.

Представляем

5.5. Представьте себе круг. Некоторая его хорда движется в нём так, что её длина не меняется. По какой линии движется середина этой хорды?

Работаем с формулой

5.6. Запишите формулу для вычисления периметра P равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b. а) Выразите из этой формулы величину каждой из сторон. б) На сколько изменится периметр, если основание увеличить на величину c? в) На сколько изменится периметр, если боковую сторону уменьшить на величину c? г) Как изменится периметр, если каждую сторону увеличить в 2 раза? уменьшить в 3 раза? д) Пусть основание стало увеличиваться, а периметр остался неизменным. Что происходит с боковой стороной? е) Пусть боковая сторона стала уменьшаться, а периметр не меняется. Что произойдет с основанием?

Находим величину

5.7. Требуется сделать равнобедренный треугольник с периметром 1 м. Какими должны быть его стороны, если: а) боковая сторона на 5 см длиннее основания; б) боковая сторона в 2 раза больше основания; в) боковая сторона в полтора раза меньше основания?

5.8. а) Периметр равнобедренного треугольника равен 12 см, а медиана, проведённая к основанию, равна 1 см. Вычислите периметр каждого из полученных треугольников. б) Составьте по этому сюжету обратную задачу.

Доказываем

5.9. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC проведите медиану BK. На ней отметьте любую точку P. Докажите, что:

а) P равноудалена от точек A и C; б) из точки P стороны BA и BC видны под равными углами; в) из точки P отрезки KA и KC видны под равными углами. Изменятся ли полученные результаты, если взять точку на продолжении BK?

5.10. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны проведённые из вершин основания медианы. Что отсюда следует для равностороннего треугольника?

5.11. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B. Из вершины B одновременно и с одной и той же скоростью двинулись точки X и Y по сторонам BA и BC. Докажите, что $XC = YA$ в любой момент времени.

5.12 Четыре точки A, B, K, P таковы, что $KA = KB$, $PA = PB$. Докажите, что: а) отрезок KP виден из точек A и B под равными углами; б) прямые AB и KP перпендикулярны; в) два равных треугольника AKB и APB ($AK = AP$) расположены с разных сторон от прямой AB. На их общую сторону проведены высоты этих треугольников. Докажите, что они попадают в одну и ту же точку.

Исследуем

5.13. Разбейте равнобедренный треугольник на два треугольника одинакового периметра. Можно ли это сделать для других треугольников?

5.14. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. Из точек K и M — середин сторон AB и BC — во внешнюю от треугольника ABC область двинулись одновременно и с одинаковой скоростью перпендикулярно соответственным сторонам точки X и Y. а) Докажите, что $XB = YB$. б) Докажите, что точки X и Y всегда будут на равных расстояниях от середины AC. в) Изменятся ли эти результаты, если точки X и Y будут двигаться не из середин сторон, а из таких точек S и T на сторонах AB и BC, что $BS = BT$? г) Изменятся ли эти результаты, если точки X и Y двинутся в направлениях, противоположных первоначальным?

Рассмотрим решение. Решим задачу б). На рисунке 187 треугольник ABC равнобедренный с вершиной B, $AD = DC$. Отрезки XK и YM изображают траектории движения точек X и Y. Так как точки X и Y начали движение одновременно и с одной скоростью, то $XK = YM$.

Требуется доказать, что $XD = YD$. Вы уже знаете, что равенство отрезков чаще всего доказывают из равенства треугольников, в которых они являются сторонами. В какие же треугольники заключить отрезки XD и YD?

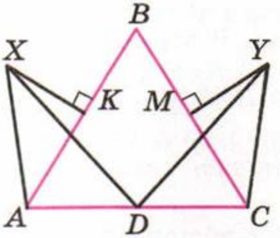


Рис. 187

Попробуем взять треугольники XAD и YCD. В них $DA = DC$ (?). (Такой знак вопроса означает, что объяснение надо поискать самим.) $XA = YC$ (из равенства треугольников XKA и YMC), $\angle XAD = \angle YCD$. (А это откуда следует?) Но тогда треугольники равны (?) и выходит, что $XD = YD$.

Утверждение подтвердилось потому, что мы взяли «хорошие» треугольники. Поищите сами другие пары «хороших» треугольников, из которых вы сможете получить равенство тех же отрезков.

Решение этой задачи, как принято, мы начинали с рисунка. Но всегда ли рисунок будет таким? Сделайте, например, рисунок к этой задаче, взяв угол B тупым, а точки X и Y достаточно далеко друг от друга. Вы сможете увидеть разницу в рисунках. Изменится ли от этого решение задачи? А если угол будет прямым?

Рассуждаем

5.15. Если из вершины равнобедренного треугольника провести биссектрису, то она совпадёт с его медианой — это легко доказать по признаку равенства треугольников. Попробуйте найти доказательство данного утверждения, не используя признак равенства.

5.16. В некотором треугольнике из одной и той же вершины провели медиану и биссектрису. И они не совпали. Следует ли из этого, что треугольник не является равнобедренным?

5.2. Серединный перпендикуляр

Прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная этому отрезку, называется **серединным перпендикуляром отрезка** (рис. 188). Это понятие в дальнейшем используется очень часто.

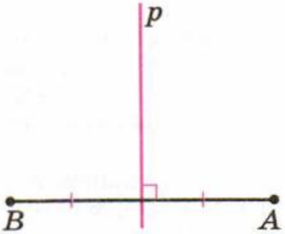


Рис. 188

Сначала докажем *свойство серединного перпендикуляра*: **если точка лежит на серединном перпендикуляре отрезка, то она равноудалена от концов этого отрезка.**

Дано: отрезок AB, прямая p — серединный перпендикуляр отрезка AB, точка M лежит на p (рис. 189).

Доказать: $MA = MB$.

Доказательство. Пусть C — точка, в которой прямая p пересекает отрезок AB. Так

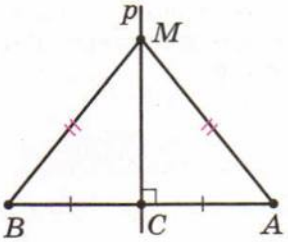


Рис. 189

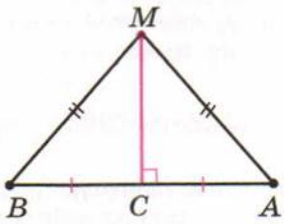


Рис. 190

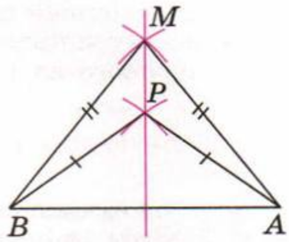


Рис. 191

как $AC = BC$, то прямоугольные треугольники MCA и MCB равны (по двум катетам). Поэтому равны их гипотенузы: $MA = MB$. ■

А следующее утверждение является *признаком серединного перпендикуляра*: **если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.** Докажем его.

Дано: отрезок AB, точка M, $MA = MB$ (рис. 190).

Доказать: точка M лежит на серединном перпендикуляре отрезка AB.

Доказательство. Так как треугольник MAB равнобедренный, то его медиана MC является и его высотой (по теореме 4 о свойствах равнобедренного треугольника). Поэтому прямая MC — серединный перпендикуляр отрезка AB. ■

Этот признак подсказывает нам, как *построить серединный перпендикуляр заданного отрезка BC*.

□ Серединный перпендикуляр отрезка AB — это прямая. Чтобы построить прямую, достаточно найти какие-нибудь две её точки. Такими точками (согласно признаку) являются вершины любых двух равнобедренных треугольников MAB и PAB с основанием AB (рис. 191). Как построить такие треугольники, ясно из этого рисунка. ■

Признак серединного перпендикуляра даёт нам возможность решить циркулем и линейкой и еще одну важную задачу на построение: *опустить перпендикуляр из данной точки A на заданную прямую p* (рис. 192, а).

□ Сначала строим любой равнобедренный треугольник ABC с вершиной A и основанием BC, лежащим на прямой p (рис. 192, б). Затем стро-

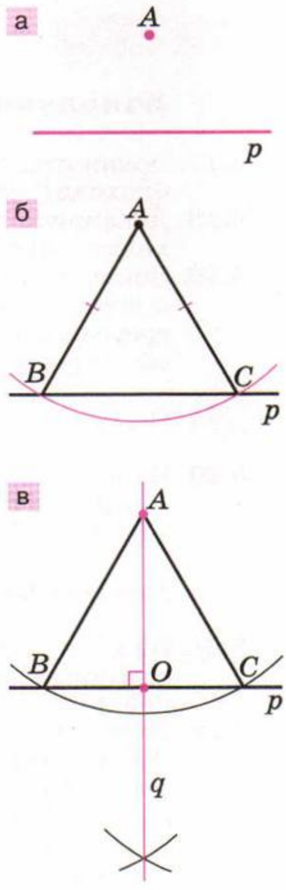


Рис. 192

им серединный перпендикуляр q отрезка BC. Та точка O, в которой пересекутся прямые p и q, является основанием перпендикуляра AO, опущенного из точки A на прямую p (рис. 192, в). ■

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется серединным перпендикуляром отрезка?
2. Каким свойством обладает серединный перпендикуляр?
3. Каков признак серединного перпендикуляра?
4. Как построить серединный перпендикуляр отрезка?
5. Какие задачи на построение решаются построением серединного перпендикуляра?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.17. Докажите, что серединный перпендикуляр хорды окружности проходит через центр окружности.

5.18. Докажите, что три высоты равностороннего треугольника проходят через одну точку.

5.19. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к двум сторонам треугольника: а) равноудалена от всех вершин треугольника; б) лежит на серединном перпендикуляре третьей стороны этого треугольника.

Рисуем

5.20. Нарисуйте треугольную пирамиду $PABC$. Полагая, что $PA = PB = PC$, нарисуйте серединные перпендикуляры отрезков AB, AC и BC, лежащие на поверхности пирамиды.

Доказываем

5.21. Нарисуйте окружность и несколько её хорд. Докажите, что серединные перпендикуляры всех этих хорд пересекаются в одной точке.

5.22. Точка O — середина отрезка AB, прямая p — серединный перпендикуляр отрезка AB и X — любая точка прямой p. Докажите, что: а) отрезки OA и OB видны из X под равными углами; б) отрезок OX виден из точек A и B под равными углами; в) если K — ещё одна точка прямой p, то отрезок KX виден из точек A и B под равными углами.

5.23. Нарисуйте отрезок AB и внутри его отметьте две такие точки K и T, что $AK = BT$. Пусть точка X такова, что $XA=XB$.

а) Докажите, что $XK = XT$. б) Докажите обратное: если точка H такова, что $HK = HT$, то $HA = HB$.

Исследуем

5.24. а) Нарисуйте точки A и B и любую прямую a. Найдётся ли на прямой a точка, равноудалённая от точек A и B? Если найдётся, то сколько таких точек может быть и какую фигуру они могут заполнить? б) Замените в условии задачи прямую некоторым отрезком. в) Решите аналогичную задачу, заменив в условии прямую треугольником.

5.25. Постройте точку, равноудалённую от всех вершин равнобедренного треугольника, если этот треугольник: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Как расположена полученная точка по отношению к треугольнику? Можете ли вы обосновать свою гипотезу?

5.26. Нарисуйте отрезок AB. Сможете ли вы построить серединный перпендикуляр этого отрезка, работая только с одной стороны от прямой AB?

Рассуждаем

5.27. Нарисуйте две точки A и B. Пусть каждая из точек C, K, P равноудалена от точек A и B. Лежат ли точки C, K, P на одной прямой?

5.28. Нарисуйте отрезок AB и его серединный перпендикуляр p. Пусть точка X такова, что $XA \neq XB$. Докажите, что точка X не лежит на прямой p.

5.3. Взаимно обратные утверждения

В знаменитой книге «Алиса в Стране чудес», написанной Льюисом Кэрроллом, между участниками «безумного чаепития» (так называется одна из глав книги) происходит такой разговор:

«— Так бы и сказала, — заметил Мартовский Заяц. — Нужно всегда *говорить то, что думаешь.*

— Я всегда так и делаю, — поспешила объяснить Алиса. — По крайней мере... По крайней мере, я всегда *думаю то, что говорю...* а это одно и то же...

— Совсем не одно и то же, — возразил Болванщик. — Так ты ещё чего доброго скажешь, будто *«Я вижу всё, что ем»* и *«Я ем всё, что вижу»* — одно и то же!

— Так ты ещё скажешь, будто *«Что имею, то люблю»* и *«Что люблю, то имею»* — одно и то же! — подхватил Мартовский Заяц.

— Так ты ещё скажешь, — проговорила, не открывая глаз, Соня, — будто *«Я дышу, пока сплю»* и *«Я сплю, пока дышу»* — одно и то же!»

В этом отрывке приведено несколько пар утверждений (они выделены *курсивом*). Если вы сравните два утверждения в каждой паре, то заметите, что они устроены так: исходное положение (условие) первого является заключением второго и, наоборот, условие второго — это заключение первого. В таком случае говорят, что *второе утверждение является обратным к первому, а первое обратно ко второму*. Говорят также, что они **взаимно обратные**.

И все участники «безумного чаепития» объясняют Алисе, что утверждение и ему обратное — это не одно и то же. Даже больше того, одно из них может быть истинным, а другое нет. Но могут быть и оба истинными (например: «Если отрезки равны, то равны и их длины» и «Если равны длины отрезков, то равны и отрезки»), и оба ложными (например: «Если человек — король, то он старый» и «Если человек старый, то он король»).

Не случайно в книге про Алису встретились взаимно обратные утверждения. Льюис Кэрролл — литературный псевдоним английского математика Чарльза Доджсона (1832—1898).

Не только писатели-математики в своих книгах говорят о взаимно обратных утверждениях. Вот что говорил капитан Врунгель в известной книге А. Некрасова «Приключения капитана Врунгеля»: «После ряда наблюдений я установил с исключительной точностью, что каждая селёдка — рыба, но не каждая рыба — селёдка».

В приведённых примерах образно показано, что истинность каждого из взаимно обратных утверждений должна доказываться отдельно. Одно из другого не следует.

Мы только что доказали истинность двух взаимно обратных утверждений:

1) *если точка лежит на серединном перпендикуляре отрезка, то она равноудалена от концов этого отрезка;*

2) *если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.*

В тех случаях когда верны оба взаимно обратных утверждения, их часто для краткости объединяют оборотом «тогда и только тогда». Объединим, используя этот оборот, два доказанных взаимно обратных утверждения о точках серединного перпендикуляра в одну теорему.

Теорема 5 (*о серединном перпендикуляре*). **Точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на его серединном перпендикуляре.**

Потренируйтесь в составлении взаимно обратных утверждений и проверке их истинности. Возьмите, например, три утверждения теоремы 4 о свойствах равнобедренного треугольника, составьте обратные утверждения и проверьте их истинность.

О любых двух утверждениях, каждое из которых может быть выведено из другого, говорят, что они **равносильны**. Проводя рассуждения, доказательства, всегда можно заменить утверждение равносильным ему, если это удобно.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы знаете о взаимно обратных утверждениях?
2. Приведите примеры взаимно обратных утверждений.
3. Могут ли быть верными оба взаимно обратных утверждения?
4. Может ли быть верным лишь одно из взаимно обратных утверждений?
5. Могут ли быть неверными оба взаимно обратных утверждения?
6. Какие утверждения называются равносильными?
7. Приведите примеры равносильных утверждений.
8. Равносильны ли взаимно обратные утверждения?
9. Приведите примеры равносильных взаимно обратных утверждений.
10. Приведите примеры неравносильных взаимно обратных утверждений.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.29. Докажите, что треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда у него совпадают: а) медиана и биссектриса; б) биссектриса и высота; в) медиана и высота.

Рассуждаем

5.30. Утверждение «Вертикальные углы равны» сформулируйте в форме: «Если... то...». Сформулируйте обратное ему утверждение. Верно ли оно?

5.4. Сравнение сторон и углов треугольника

В п. 5.1 мы доказали, что *в треугольнике против равных сторон лежат равные углы*. Сейчас мы докажем, что **в треугольнике против большей стороны лежит больший угол**, а также и обратное ему утверждение (сформулируйте его). Мы объединим их в одной теореме.

Теорема 6 (*о сравнении сторон и углов треугольника*). **В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол,** и обратно: **2) против большего угла лежит бо́льшая сторона.**

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB. Докажем, что угол B больше угла C.

Отложим на отрезке AC от точки A отрезок AD, равный отрезку AB, и проведём отрезок BD (рис. 193). Треугольник ABD равнобед-

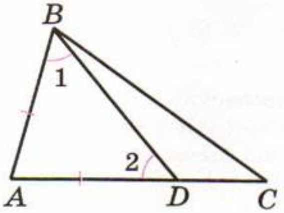


Рис. 193

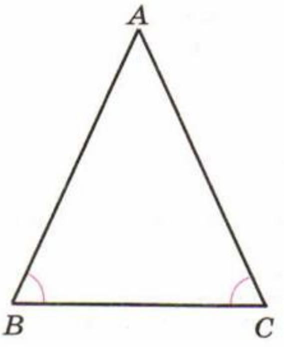


Рис. 194

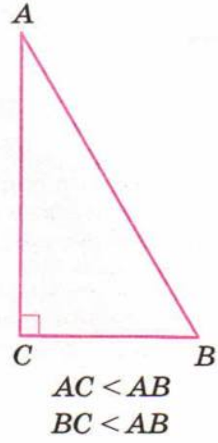


Рис. 195

ренный, а потому $\angle 1 = \angle 2$. Угол 2 внешний в треугольнике BDC, значит, угол C меньше угла 2. Поэтому угол C меньше угла 1, равного углу 2, а потому и подавно меньше угла B треугольника ABC, частью которого является угол 1. Мы доказали, что угол B больше угла C.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть известно, что в треугольнике ABC угол B больше угла C. Нам нужно доказать, что $AC > AB$.

Применим метод от противного. Предположим, что сторона AC не больше стороны AB. Возможны два случая: а) $AC = AB$. Тогда треугольник ABC равнобедренный и $\angle B = \angle C$ (по теореме 4) — приходим к противоречию с условием теоремы. б) $AC < AB$. Тогда, согласно доказанному уже первому утверждению теоремы, $\angle B < \angle C$, и снова приходим к противоречию с условием теоремы.

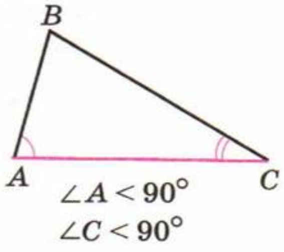


Рис. 196

Итак, предполагая, что AC не больше AB, мы приходим к противоречию с условием теоремы. Поэтому $AC > AB$. ■

СЛЕДСТВИЕ 1 (*признак равнобедренного треугольника*). **Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.**

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $\angle B = \angle C$ (рис. 194). Допустим, что стороны AB и AC не равны. Тогда одна из них больше другой, например $AC > AB$. Но тогда (по теореме 6) угол B больше угла C — приходим к противоречию. Поэтому $AC = AB$ и треугольник ABC равнобедренный. ■

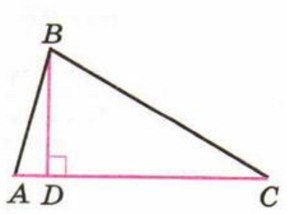


Рис. 197

Это следствие вместе с первым свойством равнобедренного треугольника позволяет говорить, что *треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда два угла треугольника равны.*

СЛЕДСТВИЕ 2 **В прямоугольном треугольнике катет короче гипотенузы** (рис. 195).

СЛЕДСТВИЕ 3 **Углы, прилежащие к большей стороне треугольника, острые** (рис. 196).

СЛЕДСТВИЕ 4 **Высота треугольника, опущенная на его наибольшую сторону, лежит внутри треугольника** (рис. 197).

Следствия 2—4 докажите самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли сравнивать углы треугольника, сравнивая его стороны? На чём основано такое сравнение?
2. Можно ли сравнивать стороны треугольника, сравнивая его углы? На чём основано такое сравнение?
3. Какие признаки равнобедренного треугольника вы знаете?
4. Какая сторона прямоугольного треугольника наибольшая?
5. Какие следствия теоремы о сравнении сторон и углов треугольника вам известны?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.31. Докажите, что диагонали прямоугольника разбивают его на две пары равных друг другу равнобедренных треугольников.

5.32. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром симметрии прямоугольника.

Смотрим

5.33. Укажите равнобедренные треугольники на рисунке 198 на с. 120.

5.34. Какие неравенства для отрезков и углов, изображённых на рисунке 199 на с. 121, вы можете указать?

5.35. Какие точки на рисунке 200 на с. 121 являются вершинами равнобедренных треугольников? Укажите эти треугольники.

5.36. Какие точки на рисунке 201 на с. 122 являются вершинами равносторонних треугольников? Укажите эти треугольники.

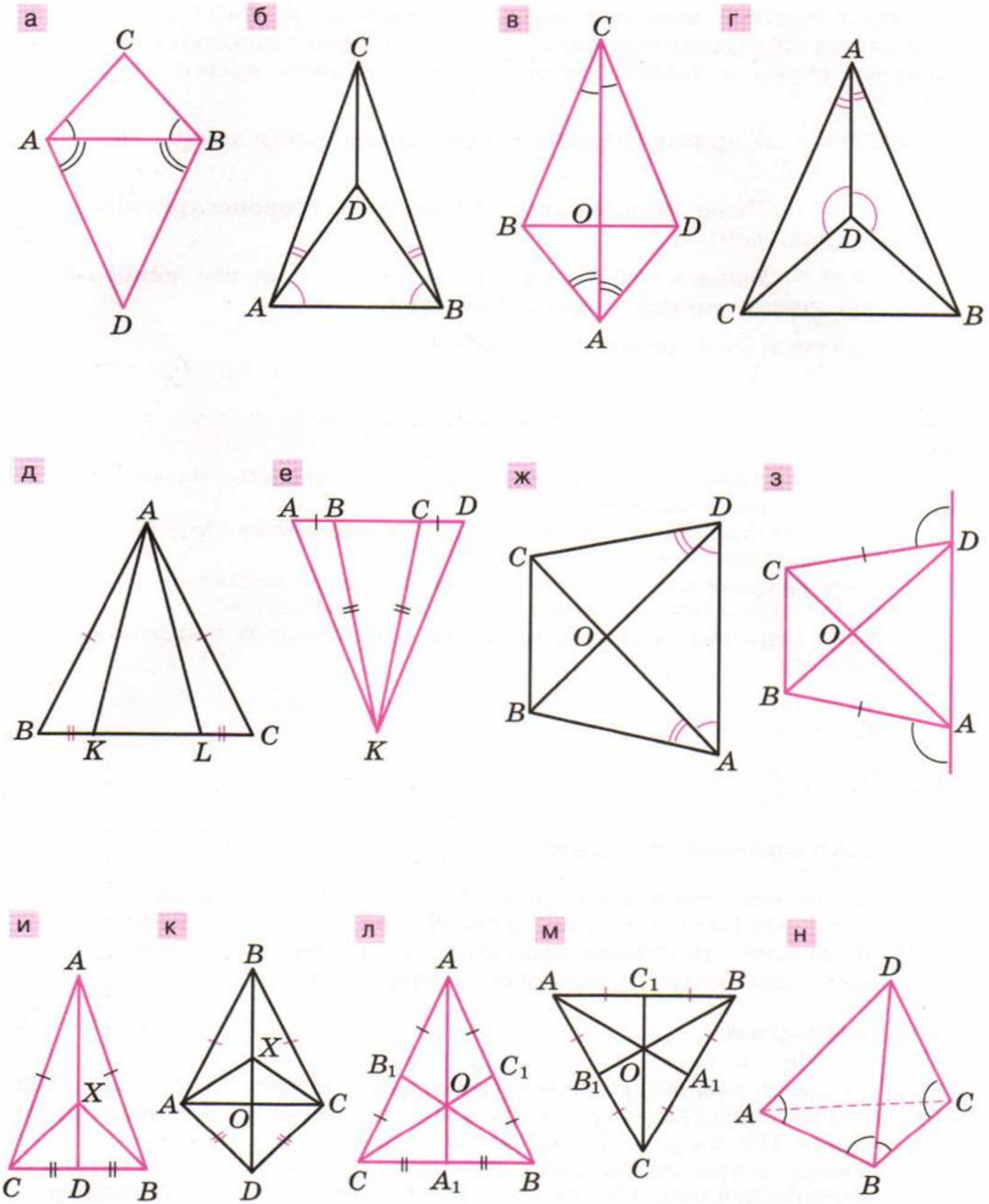

а
C
A
B
D
б
C
D
A
B
в
C
B
O
D
A
г
A
D
C
B
д
A
B
K
L
C
е
A
B
C
D
K
ж
D
C
O
B
A
з
D
C
O
B
A
и
A
X
C
D
B
к
B
X
A
O
C
D
л
A
B₁
O
C₁
C
A₁
B
м
A
C₁
B
B₁
O
A₁
C
н
D
A
C
B

Рис. 198

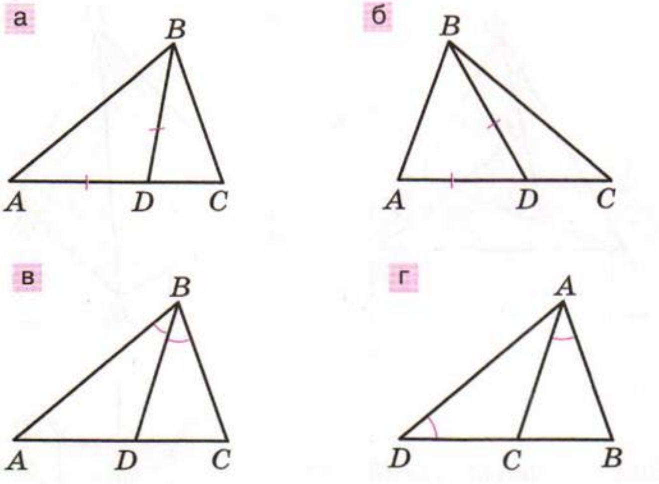


Рис. 199

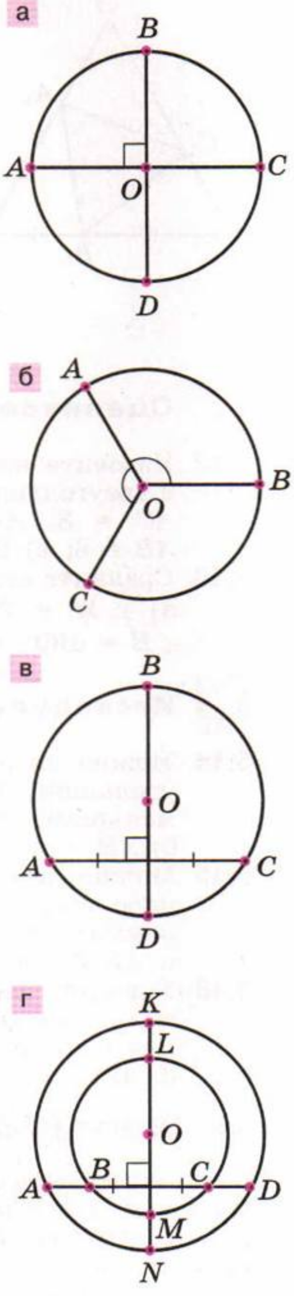


Рис. 200

Строим

5.37. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Доказываем

5.38. Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. На его боковых сторонах AB и AC отложили равные друг другу отрезки AK и AM (AK на AB и AM на AC). Отрезки BM и CK пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник OBC равнобедренный.

5.39. В равнобедренном треугольнике ABC из вершин его основания BC провели биссектрисы (медианы) BM и CK. Точка O — точка пересечения отрезков BM и CK. Докажите, что треугольник BCO равнобедренный.

5.40. В треугольнике ABC точка X лежит внутри стороны BC. Докажите, что отрезок AX меньше хотя бы одной из сторон — AB или AC.

5.41. В треугольнике ABC точка X лежит внутри стороны AB, а точка Y — внутри стороны AC. Докажите, что его хорда XY меньше хотя бы одной из сторон этого треугольника.

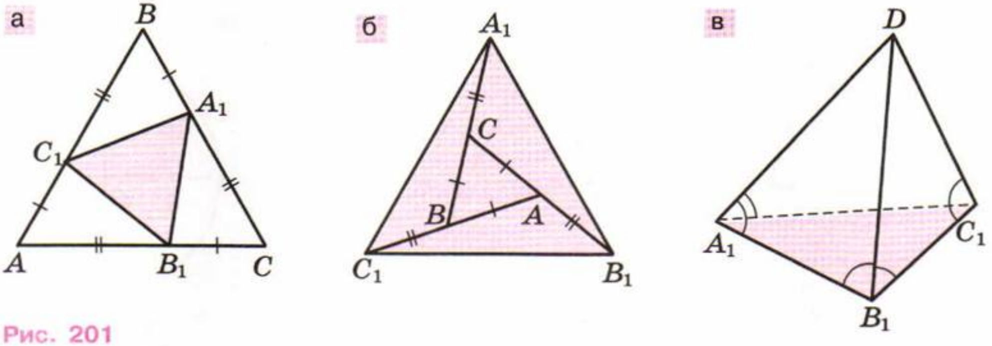


Рис. 201

Оцениваем

5.42. Назовите наибольший и наименьший углы в треугольнике ABC, если в нём: а) $BC = 9$, $AC = 8$, $AB = 7$; б) $BC = 9$, $AC = 8$, $AB = 8$; в) $BC = 9$, $AC = 9$, $AB = 8$.

5.43. Сравните стороны треугольника, в котором: а) $\angle A = 25°$, $\angle B = 100°$; б) $\angle A = 40°$, $\angle B = 100°$; в) $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$.

Исследуем

5.44. Можно ли определить, какой из углов треугольника ABC наибольший и какой наименьший, если: а) $AC > BC$ и $AB = BC$; б) $AB > AC$ и $AB > BC$?

5.45. Можно ли назвать наибольшую и наименьшую стороны треугольника PMK, в котором: а) $\angle P = \angle M$ и $\angle M > \angle K$; б) $\angle P > \angle M$ и $\angle P < \angle K$?

5.46. Укажите наибольший и наименьший отрезки с концами в вершинах: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 2, 3, 4?

5.5. Осевая симметрия

Знакомство с различными симметриями мы начали в п. 2.3 с рассказа о центральной симметрии. В этом пункте мы расскажем ещё об одном виде симметрии — **осевой симметрии**. Посмотрите на рисунок 202: там изображены различные фигуры, обладающие осевой симметрией.

Рис. 202

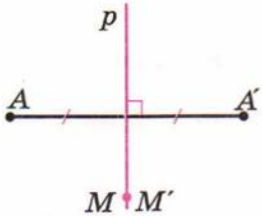


Рис. 203

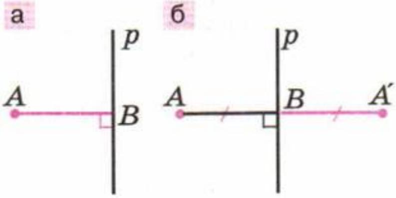


Рис. 204

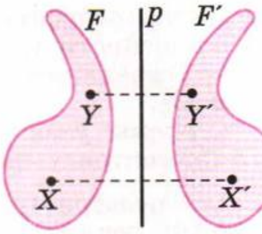


Рис. 205

Вспомните смысл слова *симметрия* и попробуйте сформулировать, какие фигуры можно назвать симметричными относительно прямой.

Сначала нужно понять, какие точки мы будем называть симметричными относительно прямой. Говорят, что **две точки A и A' симметричны относительно прямой p, если прямая p перпендикулярна отрезку AA' и делит его пополам** (рис. 203).

Другими словами: *две точки A и A' симметричны относительно прямой p, если эта прямая является серединным перпендикуляром отрезка AA'.*

Точка, лежащая на прямой p, считается симметричной сама себе относительно этой прямой.

Из этих определений ясно, как построить точку, симметричную данной точке A относительно данной прямой p.

Если точка A лежит на прямой p, то она и будет симметричной сама себе относительно прямой p.

Обсудим случай, когда точка A не лежит на прямой p. В этом случае из точки A опустим перпендикуляр AB на прямую p (рис. 204, а), а затем продолжим его за точку B на отрезок BA', равный отрезку AB (рис. 204, б). Точка A' и будет симметричной точке A относительно прямой p.

Две фигуры называются симметричными относительно прямой p, если они состоят из попарно симметричных точек (рис. 205).

Короче можно сказать так: две фигуры симметричны относительно прямой, если они состоят из точек, симметричных относительно этой прямой.

В частности фигура может быть симметричной самой себе относительно некоторой прямой p. Это значит, что для каждой её точки X точка X', симметричная ей относительно p, лежит в ней же. Прямая p называется тогда **осью симметрии** фигуры, а о фигуре говорят, что она обладает **осевой симметрией**.

Приведём пример фигур, обладающих осевой симметрией. Ясно, что плоскость симметрична относительно любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 206, а). Прямая симметрична относительно любой перпендикулярной ей прямой (рис. 206, б). Полуплоскость симметрична относительно любой прямой, перпендикулярной границе полуплоскости (рис. 206, в). Отрезок симметричен относительно своего серединного перпендикуляра (рис. 206, г). А вот пример посложнее.

Стороны угла симметричны относительно прямой, содержащей его биссектрису (рис. 207, а).

□ Для развёрнутого угла это уже было сказано (см. рис. 206, в). Поэтому докажем симметричность сторон a и b неразвёрнутого угла ab с вершиной O относительно прямой c, содержащей его биссектрису (см. рис. 207, а).

Возьмём на луче a любую точку A. Затем построим на луче b такую точку B, что $OB = OA$ (рис. 207, б). Проведём отрезок AB. Он пересечёт прямую c в некоторой точке C (рис. 207, в).

Отрезок OC является биссектрисой в равнобедренном треугольнике OAB, проведённой к его основанию AB. Эта биссектриса является также и медианой, и высотой треугольника OAB (так как треугольники OAC и OBC равны по первому признаку). Поэтому прямая OC — серединный перпендикуляр отрезка AB, т. е. точки A и B симметричны относительно прямой c.

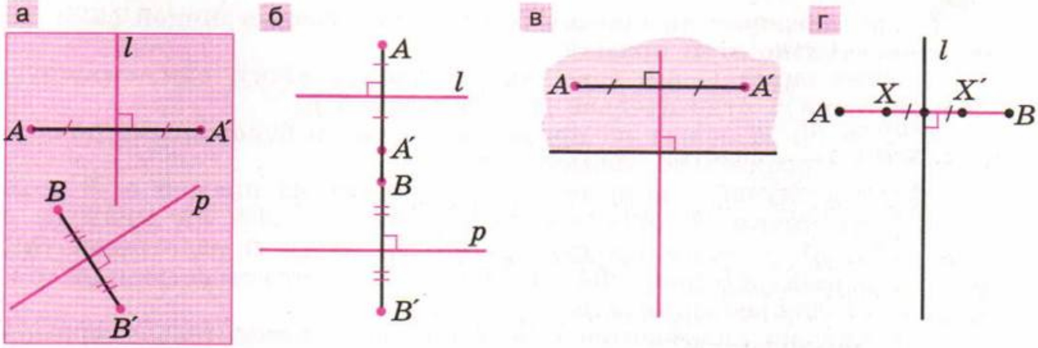


Рис. 206

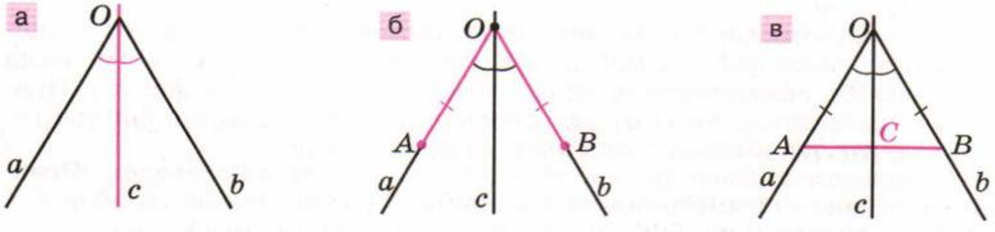


Рис. 207

Мы установили симметричность сторон угла ab относительно прямой, содержащей его биссектрису. Докажите самостоятельно, что сам угол тоже симметричен относительно этой прямой (рис. 208). ■

Итак, *осью симметрии угла является прямая, содержащая его биссектрису.*

Проведённое сейчас доказательство применимо и к равнобедренному треугольнику. Поэтому *равнобедренный треугольник симметричен относительно прямой, которая содержит его биссектрису, проведённую к основанию треугольника* (рис. 209, а). А у равностороннего треугольника три оси симметрии, проходящие через одну точку (рис. 209, б).

Докажите самостоятельно, что *окружность и ограниченный ею круг симметричны относительно любой прямой, проходящей через центр окружности* (рис. 209, в).

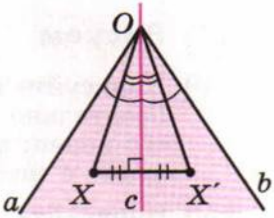


Рис. 208

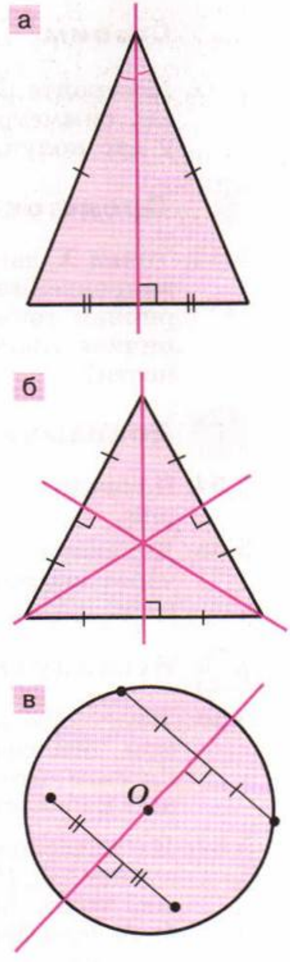


Рис. 209

Вопросы для самоконтроля

1. С каким видом симметрии вы познакомились в этом пункте?
2. Какие точки называются симметричными относительно прямой?
3. Какие фигуры называются симметричными относительно прямой?
4. Как построить точку, симметричную данной относительно прямой?
5. Может ли быть точка симметрична сама себе относительно прямой?
6. Может ли быть фигура симметрична сама себе относительно прямой?
7. Что называется осью симметрии фигуры?
8. Укажите фигуры, обладающие осевой симметрией, и их оси.

ЗАДАЧИ

Смотрим

5.47. Какие печатные буквы русского алфавита имеют ось симметрии?

5.48. Какие цифры обладают осевой симметрией?

Рисуем

5.49. Нарисуйте отрезок. Нарисуйте симметричный ему отрезок относительно прямой: а) содержащей его; б) проходящей через его конец; в) пересекающей его во внутренней точке; г) не имеющей с ним общих точек.

5.50. Нарисуйте фигуру, имеющую две параллельные оси симметрии. Есть ли у этой фигуры ещё какие-нибудь оси симметрии?

5.51. Нарисуйте фигуру, имеющую две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

Строим

5.52. Постройте равносторонний треугольник. Постройте треугольники, симметричные ему относительно его сторон. Какая фигура у вас получилась? Можете ли вы это доказать?

Представляем

5.53. Точка X движется по окружности по часовой стрелке. В каком направлении будет двигаться по окружности точка: а) симметричная точке X относительно центра окружности; б) симметричная точке X относительно некоторого диаметра этой окружности?

Доказываем

5.54. Докажите, что диагонали квадрата являются его осями симметрии.

5.55. Докажите, что перпендикуляр к стороне квадрата, проходящий через середину этой стороны, является осью симметрии квадрата.

Исследуем

5.56. Нарисуйте две произвольные окружности. Есть ли такая прямая, относительно которой каждая окружность симметрична? Рассмотрите также случай, когда окружности не лежат в одной плоскости.

5.57. На классной доске Федя нарисовал угол и построил его биссектрису. а) Пришёл Вася и стёр угол, а биссектрису оставил да ещё точку на одной стороне. Можно ли восстановить рисунок? б) А если Вася оставил не всю биссектрису, а только её часть и точку на стороне угла? в) А если он оставил часть биссектрисы и хорду угла?

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

Рисуем

II.1. Нарисуйте куб. Нарисуйте на его поверхности и не лежащий в его грани: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник. Отметьте на его поверхности вершины правильного тетраэдра. (**Правильным тетраэдром** называется тетраэдр, все рёбра которого равны.)

Смотрим

II.2. Нарисуйте два равнобедренных треугольника с общим основанием. Проведите через их вершины прямую. Найдите равные треугольники на рисунке. (Рассмотрите разные случаи расположения треугольников.)

II.3. Нарисуйте три равнобедренных треугольника с общим основанием. Проведите прямую через их вершины. (Почему они лежат на одной прямой?) Найдите равные треугольники на рисунке. (Рассмотрите разные случаи расположения треугольников.)

Находим величину

II.4. Запишите выражение для периметра P равнобедренного треугольника, в котором: а) боковая сторона равна x, а основание на 12 длиннее; б) основание равно a, а боковая сторона на 1 короче; в) боковая сторона равна b и в 2 раза длиннее основания. Вычислите стороны этих треугольников, когда периметр равен 100.

II.5. а) Чему равен периметр P равностороннего треугольника со стороной a? б) На сколько увеличится его периметр, если длина стороны увеличится на x? в) На сколько уменьшится его периметр, если длина стороны уменьшится на y? г) Что произойдёт с периметром, если длину стороны умножить на число $k > 0$? д) В каких границах находится периметр, если длина стороны больше 1 м, но меньше 2 м? е) Выразите из полученной в пункте «а» формулы длину стороны треугольника. ж) Пусть периметр изменился на величину q. Как изменилась сторона треугольника? з) Пусть периметр увеличился в 5 раз. Что произошло со стороной? и) Пусть периметр уменьшился в k раз. Что произошло со стороной? к) Как называется зависимость между периметром и стороной, полученная в пункте «а»?

II.6. а) Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, а основание равно a. Запишите формулу для его периметра

P. б) Выразите из этой формулы основание и боковую сторону. в) Как называется зависимость между периметром и основанием при постоянной боковой стороне? г) Как называется зависимость между периметром и боковой стороной при постоянном основании? д) Как называется зависимость между основанием и боковой стороной при постоянном периметре? е) Можете ли вы построить графики этих зависимостей?

II.7. Треугольник ABC равносторонний со стороной 1 м. Точка X начинает двигаться по границе треугольника, выходит из точки A и каждую сторону проходит за 1 с. а) Вычислите расстояние XA по границе треугольника через: 1 с; 1,5 с; 2 с; 10 с. б) Через какое время расстояние XA будет равно 1 дм? 2 дм?

Планируем

II.8. Как разрезать два равных треугольника на любое число соответственно равных треугольников?

Доказываем

II.9. Докажите, что в равных треугольниках соответственно равны: а) биссектрисы; б) высоты.

II.10. Докажите, что равнобедренные треугольники равны по: а) боковой стороне и основанию; б) боковой стороне и углу при вершине; в) основанию и углу при нём; г) высоте, опущенной на основание, и углу при вершине.

II.11. Постройте окружность с центром O. Отметьте на ней точку P. Постройте ещё одну окружность с центром P радиусом OP. Обозначьте как A и B точки пересечения этих окружностей. а) Докажите, что $\angle AOB = \angle APB$. б) Докажите, что $\angle OAP = \angle OBP$. в) Какое из этих утверждений будет верным, если радиус второй окружности не будет равен OP?

II.12. а) Пусть две равные окружности с центрами в точках K и H пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB — серединный перпендикуляр отрезка KH. б) Докажите, что прямая KH — серединный перпендикуляр отрезка AB. в) Изменятся ли эти результаты, если окружности не будут равными?

II.13. Постройте две концентрические окружности с центром O. На большей из них возьмите точку A и проведите третью окружность с центром в точке A и радиусом AO. Пусть третья окружность пересекает бóльшую из концентрических окружностей в точках B и B_1, а меньшую — в точках C и C_1. Докажите, что: а) $BC = B_1C_1$; б) отрезки BC и B_1C_1 видны из точки A под равными углами; в) отрезки BC_1 и B_1C видны из точки A под равными углами.

II.14. Каждая вершина равностороннего треугольника отражается от его противоположной стороны (иначе говоря, строятся точки, симметричные вершинам относительно стороны). Докажите, что полученные три точки являются вершинами равностороннего треугольника.

II.15. Ко всем сторонам равностороннего треугольника провели серединные перпендикуляры и на их отрезках от середины каждой стороны во внешнюю сторону отложили равные отрезки. Докажите, что построенные концы этих отрезков являются вершинами равностороннего треугольника.

II.16. В тетраэдре $PABC$ $\angle PAC = \angle PAB = 90°$ и $AB = AC$. а) Докажите, что треугольник PBC равнобедренный. б) При каком дополнительном условии треугольник PBC будет равносторонним?

II.17. В правильном тетраэдре $PABC$ точка K лежит внутри ребра AC. Докажите, что треугольник PKB равнобедренный.

II.18. В основании тетраэдра $PABC$ лежит равносторонний треугольник ABC и $PA = PB = PC$. а) Докажите, что медианы граней PAB, PAC и PBC, проведённые из вершины P, равны друг другу. б) Пусть точка K — середина ребра PA. Докажите, что треугольник CKB равнобедренный. Будет ли он равнобедренным, если K — другая точка этого ребра? в) Пусть точка M — середина ребра PB. Докажите, что треугольник CKM равнобедренный. г) Докажите, что треугольник с вершинами в серединах рёбер PA, PB, PC равносторонний. д) Нарисуйте ещё равносторонние и равнобедренные треугольники с вершинами на рёбрах этой пирамиды.

Исследуем

II.19. Постройте точку, равноудалённую от всех вершин треугольника, если этот треугольник: а) остроугольный; б) тупоугольный; в) прямоугольный. Как расположена полученная точка по отношению к треугольнику? Можете ли вы обосновать свою гипотезу?

II.20. Лучи a и b образуют угол с вершиной O. а) На луче a возьмите точку A, не совпадающую с точкой O. Пусть по лучу b от вершины O движется точка X. Как изменяется угол, под которым из неё виден отрезок OA? б) Пусть теперь по сторонам этого угла движутся концы отрезка, причём один конец движется к вершине, а другой — от неё. Как изменяются углы, которые отрезок образует со сторонами угла?

II.21. Равны ли два треугольника, у которых равны: а) две стороны и угол против одной из них; б) два угла и сторона против одного из них; в) две стороны и медиана на третью сторону;

г) две стороны и высота на третью сторону; д) три высоты; е) одна сторона, один из прилежащих к ней углов и медиана из вершины, противолежащей этой стороне; ж) сторона, высота на эту сторону и медиана на другую сторону; з) сторона, один угол, прилежащий к этой стороне, и биссектриса этого угла; и) сторона, медиана к ней и медиана на другую сторону; к) высота, медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины?

Применяем геометрию

II.22. Сможете ли вы одними только сгибаниями листа бумаги получить на нём: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник?

Применяем компьютер

II.23. Постройте треугольник и его внешний угол. Измерьте величину внешнего угла и двух углов, не смежных с ним. Перемещая вершины треугольника, проверьте, что внешний угол во всех случаях больше каждого угла, не смежного с ним.

II.24. Постройте треугольник, измерьте длины его сторон и величины углов. Перемещая вершины треугольника, проверьте, что в каждом случае против большего угла лежит бо́льшая сторона.

II.25. Даны две точки A и B по одну сторону от прямой a. Постройте на прямой такую точку C, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей. В условии задачи переместите точки A и B. Проверьте, что ваше построение по-прежнему даёт верное решение задачи.

Указание: постройте точку D, симметричную точке A относительно прямой a, и воспользуйтесь тем, что длина отрезка AC равна длине отрезка DC.

Глава III
Расстояния и параллельность

Расстояния важны и в жизни, и во многих науках. «Далеко ли до школы?», «Кто из моих знакомых живёт ближе к моему дому?» — такие или подобные вопросы мы задаём часто. Астрономы определяют расстояние между звёздами, океанологи — глубину моря, химики — размеры молекул, физики, градостроители, геодезисты, археологи тоже имеют дело с измерениями различных расстояний. Каждый из них использует свои геометрические знания. В этой главе мы будем говорить о расстояниях между геометрическими фигурами. Мы увидим, что параллельность прямых — это постоянство расстояний от точек одной из них до другой.

§ 6. Расстояние между фигурами

6.1. Понятие о расстоянии

Самый простой случай — *расстояние между точками*. В п. 1.5 мы сказали, что расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, их соединяющего. Но почему берётся отрезок, а не произвольная линия, соединяющая эти точки (рис. 210)? А потому, что отрезок — самая короткая (кратчайшая) из всех таких линий.

По аналогии можно определить *расстояние от точки до фигуры*.

Представьте себе, что вы находитесь в лодке на озере и вам нужно определить, далеко ли до берега (рис. 211, а). (На рисунке 211, б лодка обозначена точкой L.) Ясно, что определять расстояние до берега мы будем, измеряя (хотя бы на глаз) расстояние до точки берега, самой близкой (ближайшей) к лодке, — до точки A. Эти наши представления о расстоянии от точки до фигуры можно выразить в виде определения.

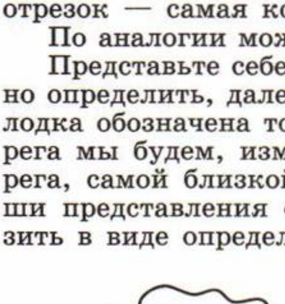


Рис. 210

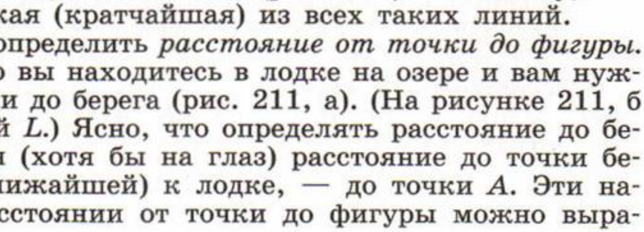


Рис. 211

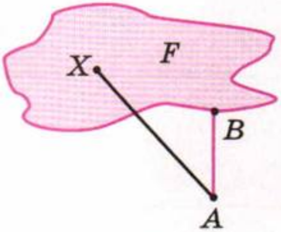


Рис. 212

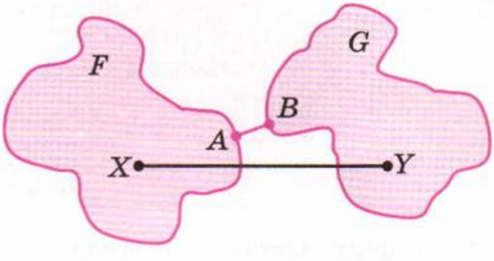


Рис. 213

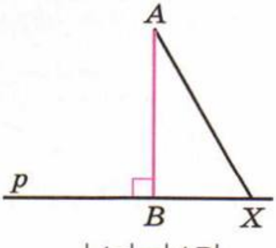
Расстоянием от точки A **до фигуры** F называется расстояние между точкой A и ближайшей к ней точкой фигуры F. При этом **точка** B **фигуры** F **называется ближайшей к точке** A, если отрезок AB не длиннее отрезков, соединяющих точку A со всеми точками фигуры F (рис. 212). (Уточним, что *не длиннее* означает *короче либо равен:* $AB \leqslant AX$.)

Расстояние от точки A до фигуры F будем обозначать так: $|AF|$. И длину отрезка AB теперь можно обозначать $|AB|$, считая точку B фигурой F. Но можно, как и раньше, применять обозначение AB как для отрезка, так и для его длины (понимая, конечно, идёт ли речь об отрезке или его длине).

По-видимому, вы теперь легко сформулируете определение расстояния между двумя фигурами. Проверьте себя: **расстоянием между двумя фигурами** F **и** G **называется расстояние между ближайшими точками этих фигур** (при этом точки A и B фигур F и G соответственно называются **ближайшими точками** этих фигур, если для любых точек X и Y этих фигур выполняется неравенство: $AB \leqslant XY$, рис. 213).

Расстояние от точки A, не лежащей на прямой p, до прямой p равно длине перпендикуляра AB, опущенного из точки A на прямую p (рис. 214).

□ Докажем это. Возьмём любую другую точку X прямой p, отличную от точки B. Тогда треугольник ABX прямоугольный, AB — его катет, AX — гипотенуза. Так как катет короче гипотенузы (следствие 2 теоремы 6 п. 5.4), то отрезок AB — кратчайший из отрезков, соединяющих точку A с точками прямой p. ■



$|Ap| = |AB|$

Рис. 214

Отрезки AX, отличные от AB, называются **наклонными**, проведёнными из точки A к прямой p. Пользуясь этим термином, неравенство $AB < AX$ часто формулируют так: *перпендикуляр короче наклонной* (подразумевая, что и перпендикуляр AB, и наклонная AX проведены из одной и той же точки).

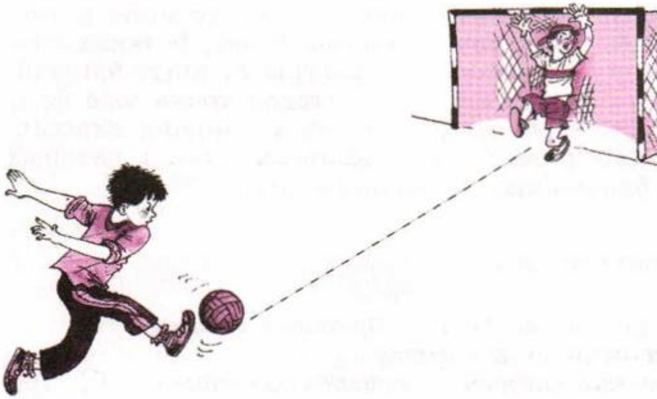


Рис. 215

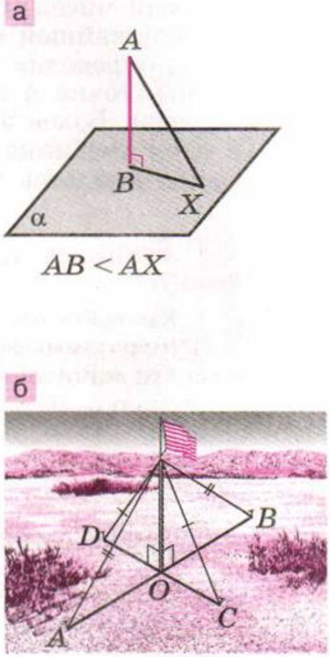


Рис. 216

Понятие расстояния от точки до прямой постоянно используется в спорте. Например, в футболе, когда при штрафном ударе отодвигают стенку из игроков на 9 м или когда при пенальти ставят мяч в точку, удалённую от линии ворот на 11 м, и т. п. (рис. 215).

Определяя расстояние от точки до фигуры, мы можем не предполагать, что эта фигура и точка лежат в одной плоскости: данное определение подходит и для пространственных фигур. Например, как найти расстояние от точки A до плоскости α, не содержащей эту точку? Надо взять длину самого короткого (кратчайшего) отрезка из всех отрезков, соединяющих точку A с точками плоскости α (рис. 216, а). Такой кратчайший отрезок AB называется **перпендикуляром к плоскости α, опущенным из точки A**. Он перпендикулярен любой прямой, проходящей в плоскости α через точку B (подумайте почему). Реальным примером перпендикуляра к горизонтальной плоскости могут служить вертикально стоящие столбы или мачты (рис. 216, б), а также отвесы.

▲ А в каждой ли фигуре содержится точка, ближайшая к заданной точке A? Нет, не в каждой. Представьте себе, что на некоторой плоскости α взят круг D радиусом r с центром A, а фигура F является плоскостью α, из которой удалён круг D (рис. 217). Среди точек фигуры F нет точек, ближайших к точке A. Действительно, расстояние от любой точки X фигуры F больше r.

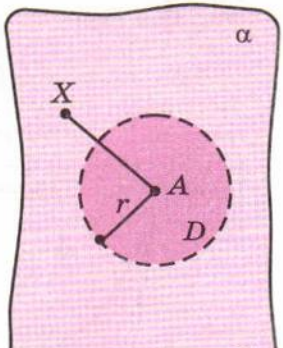


Рис. 217

А среди чисел, больших r, нет наименьшего числа. Значит, и точки, ближайшей к точке A, среди точек фигуры F нет. В таких случаях, определяя расстояние от точки A до фигуры F, ищут ближайшую к точке A *граничную точку* фигуры F (такая точка уже всегда есть). Более подробно об этом мы расскажем в старших классах. В этом учебнике мы рассматриваем лишь такие фигуры, в которых всегда найдётся точка, ближайшая к заданной точке. ▼

Вопросы для самоконтроля

1. Как найти расстояние от точки до фигуры? Приведите примеры.
2. Чему равно расстояние от точки до прямой?
3. Как найти расстояние между фигурами? Приведите примеры.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.1. Докажите, что расстояние от центра круга до его хорды равно расстоянию от центра круга до середины хорды.

Измеряем

6.2. На рисунке 218 изображены точка A и фигура F. В каждом случае измерьте расстояние от точки A до фигуры F.

6.3. Какая из точек A, B или C расположена ближе к фигуре, изображённой на рисунке 219?

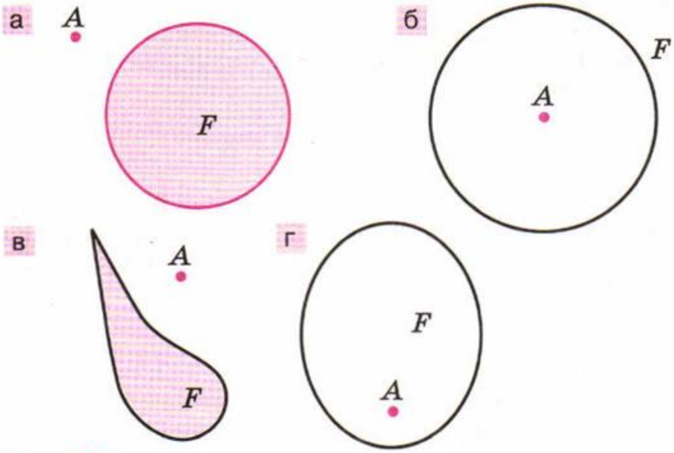


Рис. 218

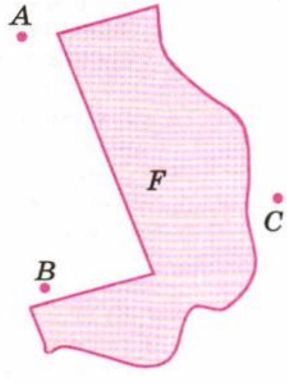


Рис. 219

Рисуем

6.4. Отметьте точку A. Нарисуйте фигуру, которая имеет одну (две, три, ..., шесть) ближайших к A точек.

6.5. Нарисуйте фигуру, не все точки которой ближайшие к данной точке A, но у которой ближайших к точке A бесконечно много.

6.6. Нарисуйте прямую и произвольный отрезок a. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех точек плоскости, удалённых от прямой на расстояние, равное длине отрезка a. Рассмотрите также и пространственный случай.

6.7. Нарисуйте плоскую фигуру, состоящую из всех точек, удалённых от данного отрезка на одно и то же расстояние a. Рассмотрите также и пространственный случай.

Представляем

6.8. Нарисуйте отрезок AB. Для каких точек M плоскости рисунка расстояние от M до AB: а) равно длине отрезка MA; б) равно длине отрезка MB; в) меньше длины каждого из этих отрезков? Рассмотрите также и пространственный случай.

6.9. Пусть окружность и прямая на плоскости не пересекаются. По прямой движется точка X. Как изменяется расстояние от точки X до окружности?

6.10. Какую фигуру заполнят на плоскости все прямые, удалённые от данной точки на данное расстояние? А в пространстве?

Оцениваем

6.11. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагонали грани AA_1B_1B, пересекающиеся в точке O. К какому из получившихся треугольников ближе всего расположена: а) точка C; б) точка пересечения диагоналей грани $ABCD$; в) центр симметрии грани DD_1C_1C; г) середина отрезка D_1C_1?

Планируем

6.12. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Как найти расстояние до него от точки, находящейся вне его: а) на прямой AD; б) на прямой AC; в) на прямой KL, где точки K и L — середины противоположных сторон квадрата?

Доказываем

6.13. Докажите, что: а) высота треугольника не больше каждой из сторон, идущих из той же вершины, что и высота, и меньше их полусуммы; б) сумма высот треугольника меньше его периметра.

6.14. Докажите, что высота пирамиды не больше каждого из её боковых рёбер. **Высота пирамиды** — это перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания пирамиды.

6.15. Докажите, что расстояние от центра окружности до самой окружности равно её радиусу.

Исследуем

6.16. Всегда ли точка фигуры, ближайшая к заданной точке, лишь одна?

6.17. Могут ли все точки фигуры быть ближайшими к какой-нибудь точке? Рассмотрите случаи на плоскости и в пространстве.

6.18. На плоскости α нарисована фигура F, а вне этой плоскости взята точка M. Может ли расстояние от точки M до данной фигуры быть: а) равным расстоянию до плоскости α; б) меньше, чем расстояние до плоскости α; в) больше, чем расстояние до плоскости α?

6.2. Неравенство треугольника

Наверное, вы не раз видели протоптанную на газоне тропинку, расположенную между проложенными садоводами дорожками. Это люди, пренебрегая замыслами садоводов, спешат и сокращают свой путь, например, от дома к автобусной остановке (рис. 220). Они интуитивно используют геометрическое свойство треугольника — так называемое *неравенство треугольника*. Об этом свойстве треугольника говорится в следующей теореме:

Теорема 7 (*неравенство треугольника*). **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.**

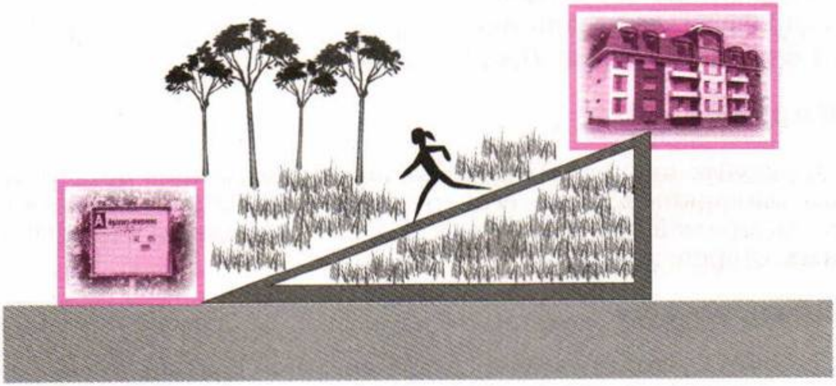


Рис. 220

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Ясно, что доказывать надо, что наибольшая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Для двух других сторон неравенство очевидно. Будем считать, что AC — наибольшая сторона треугольника ABC, и докажем неравенство $AC < AB + BC$. Проведём высоту BD треугольника (рис. 221). Она лежит внутри треугольника ABC (следствие 4 п. 5.4), а потому разбивает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника ABD и CBD. В первом из них катет AD меньше гипотенузы AB: $AD < AB$. В треугольнике BCD катет CD меньше гипотенузы BC: $CD < BC$. И так как $AC = AD + DC$, то $AC < AB + BC$. ■

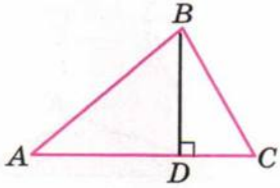


Рис. 221

Теперь, возвращаясь к задаче на построение треугольника по трём сторонам (п. 2.4), мы понимаем, что построить треугольник по трём сторонам нельзя, если заданные отрезки не удовлетворяют неравенству треугольника. Ясно, что хотя таких неравенств для треугольника можно написать три, но проверить достаточно одно: больший отрезок должен быть меньше суммы двух других отрезков.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит неравенство треугольника?
2. Как вы будете доказывать неравенство треугольника?
3. Как в практике используют неравенство треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.19. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон этого треугольника.

Находим величину

6.20. Вычислите периметр равнобедренного треугольника, если две его стороны равны: а) 4 и 7; б) 4 и 8.

Ищем границы

6.21. Основание равнобедренного треугольника равно 10. Каким может быть периметр этого треугольника?

6.22. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Каким может быть периметр этого треугольника?

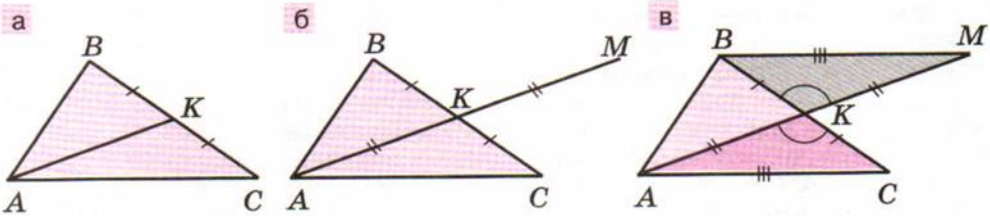


Рис. 222

6.23. В каких границах лежит третья сторона треугольника, если две другие его стороны равны: а) 1 и 2; б) 2 и 2; в) a и b?

6.24. В каких границах лежит периметр треугольника ABC, если: а) $a = 12$, $b = 15$; б) $a = 12$, $14 < b < 16$; в) $11 < a < 13$, $14 < b < 16$?

Разбираемся в решении

6.25. а) Докажите, что медиана треугольника меньше чем полусумма сторон, между которыми она находится. б) Верно ли это неравенство для любой другой хорды такого треугольника, выходящей из его вершины?

Решение. а) В треугольнике ABC проведём медиану AK (рис. 222, а). Продолжим её за точку K на отрезок KM, равный отрезку AK (рис. 222, б). Такое дополнительное построение полезно делать, когда в условии задачи речь идёт о медиане. Проведём отрезок BM и рассмотрим треугольники AKC и MKB (рис. 222, в). Эти треугольники равны (по первому признаку равенства), а потому $BM = AC$. Согласно неравенству треугольника $AB + BM > AM$. Заменяя в этом неравенстве отрезок BM равным ему отрезком AC, получаем, что $AB + AC > AM$. Но $AM = 2AK$. Поэтому сумма сторон AB и AC больше, чем удвоенная медиана AK. Значит, их полусумма больше этой медианы. б) Для других хорд это неравенство может и не выполняться. Например, для хорды AD, близкой к стороне AC (рис. 223). ■

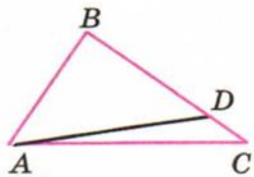


Рис. 223

Доказываем

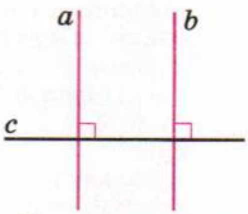
6.26. Отрезки AB и CD пересекаются в точке K. Докажите, что: а) $AK < AC + CK$; б) $KB < KD + BD$; в) $AB < AC + CD + DB$.

6.27. Точка K лежит на стороне BC прямоугольника $ABCD$. Докажите, что: а) $AK < AB + BK$; б) $KD > CD$; в) $AK + KD > AB + CD$.

§ 7. Параллельность прямых

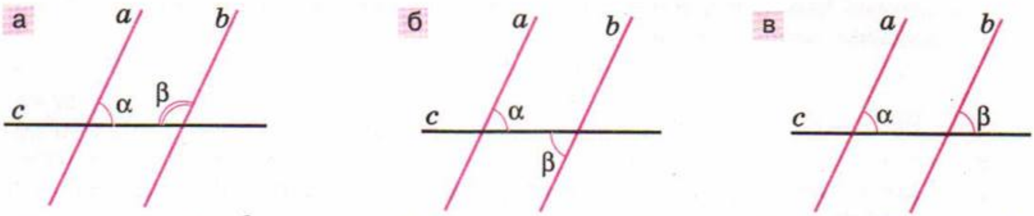
7.1. Признаки параллельности прямых

Мы уже доказали в п. 4.6, что *на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны* (будем называть это утверждение *утверждением о параллельности перпендикуляров на плоскости*, рис. 224). Утверждение о параллельности перпендикуляров на плоскости является частным случаем нескольких более общих признаков параллельности прямых на плоскости. Эти признаки вы увидите, глядя на рисунок 225. Все они, как и утверждение о параллельности перпендикуляров, вытекают из теоремы 3 (п. 4.5) о внешнем угле треугольника: этот угол больше не смежного с ним угла треугольника. Допустив, что эти признаки не верны, мы приходим к противоречию с теоремой 3 (рис. 226).



Если $a \perp c$ *и* $b \perp c$, *то* $a \parallel b$.

Рис. 224



Если $\alpha + \beta = 180°$, *то* $a \parallel b$.

Если $\alpha = \beta$, *то* $a \parallel b$.

Если $\alpha = \beta$, *то* $a \parallel b$.

Рис. 225

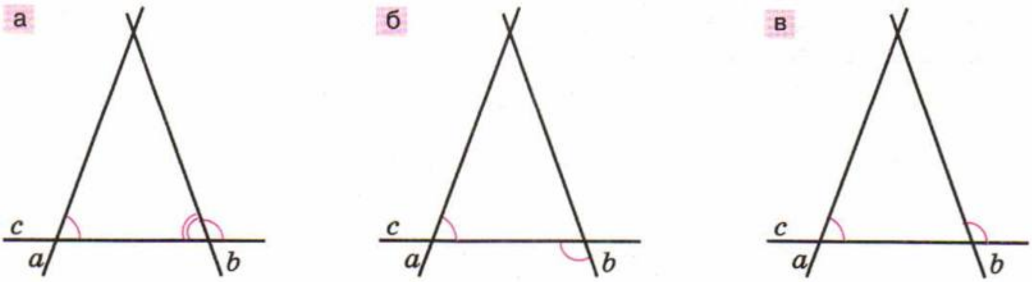


Рис. 226

Чтобы было удобно формулировать эти признаки, парам углов, которые образуются на плоскости при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c (её называют *секущей*), дают специальные названия (рис. 227). Пары углов 4, 5 и 3, 6 называют **внутренними односторонними**, пары углов 3, 5 и 4, 6 называют **внутренними накрест лежащими**. А четыре пары углов 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называют **соответственными**.

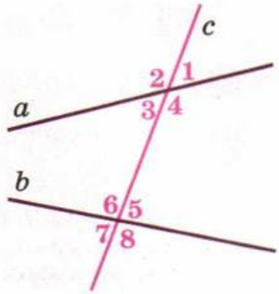


Рис. 227

Используя эту терминологию, мы можем сформулировать найденные (и доказанные!) три *признака параллельности прямых на плоскости*.

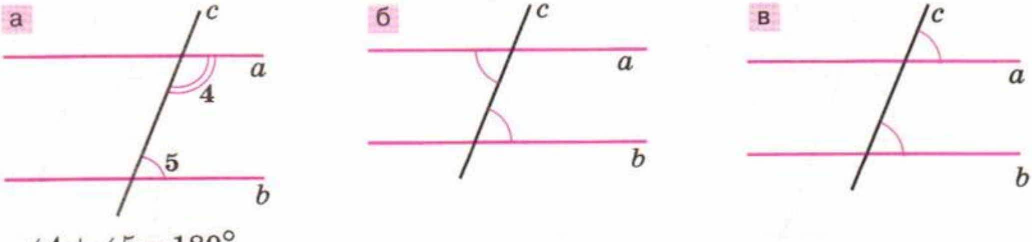
Теорема 8 *(о признаках параллельности прямых).* **1) Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что сумма двух внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые a и b параллельны** (рис. 228, а);

2) если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые a и b параллельны (рис. 228, б);

3) если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что соответственные углы равны, то прямые a и b параллельны (рис. 228, в).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие пары углов образуются на плоскости при пересечении двух прямых третьей прямой?
2. Какие признаки параллельности прямых вы теперь знаете?



$\angle 4 + \angle 5 = 180°$

Рис. 228

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Смотрим

7.1. На рисунке 229 укажите внутренние накрест лежащие, соответственные и внутренние односторонние углы.

7.2. На рисунке 230 найдите параллельные прямые.

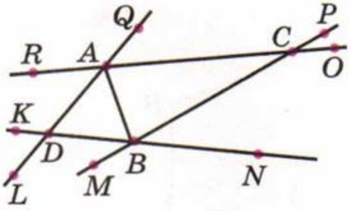


Рис. 229

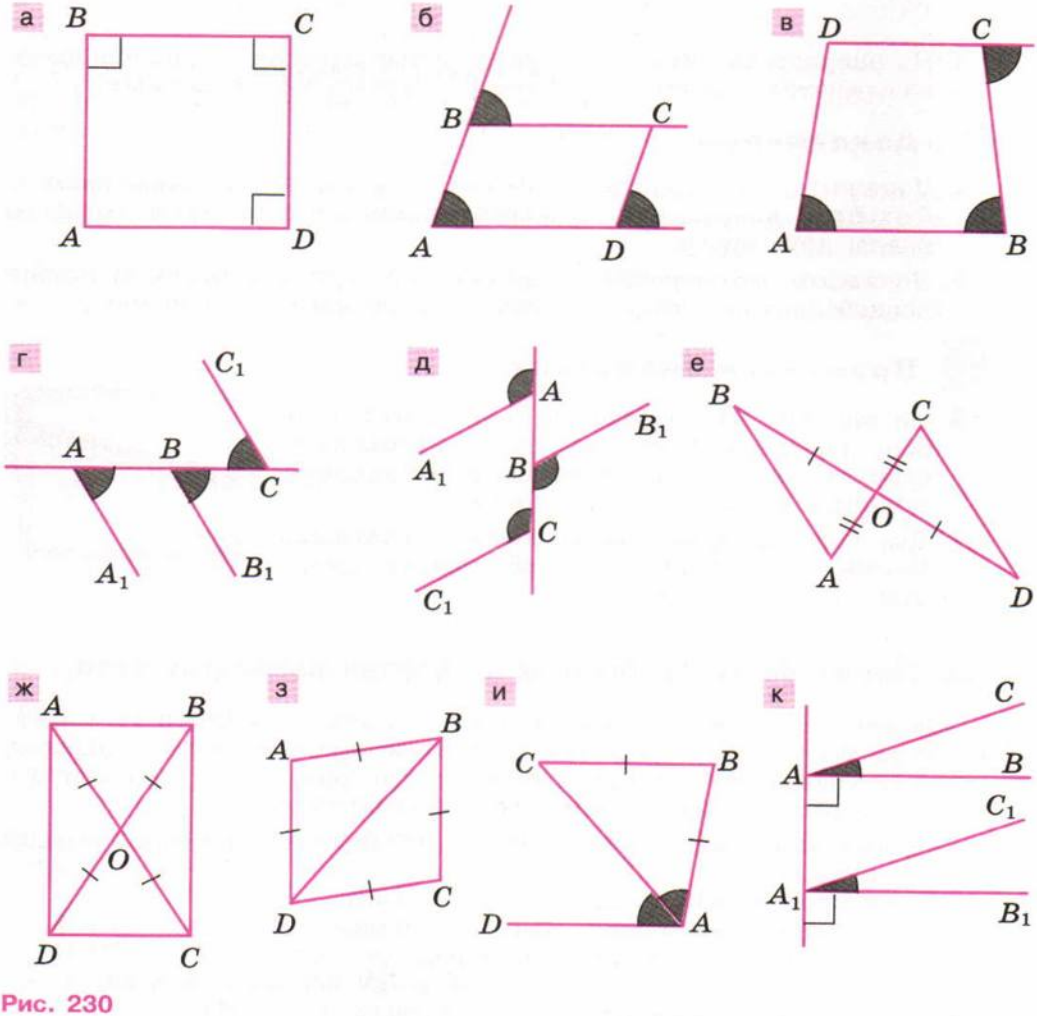


Рис. 230

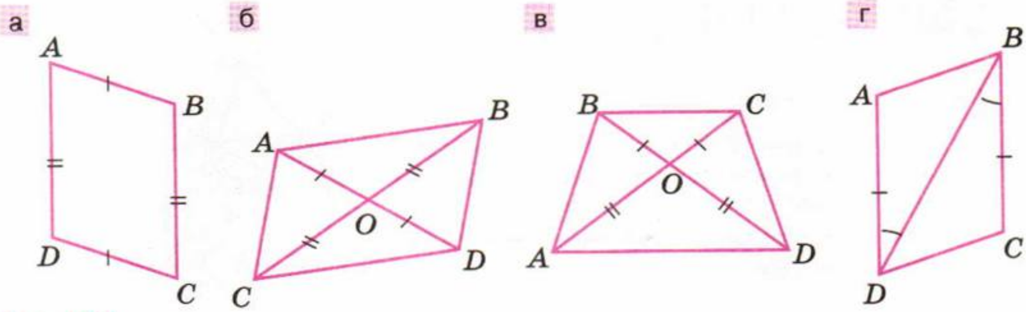


Рис. 231

7.3. На рисунке 231 найдите **параллельные отрезки** (параллельными называются отрезки, лежащие на параллельных прямых).

Доказываем

7.4. Докажите, что противоположные стороны ромба параллельны. **Ромбом** называется четырёхугольник, все стороны которого равны друг другу.

7.5. Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллелен его основанию.

Применяем геометрию

7.6. На рисунке 232 изображён чертёжный прибор, называемый рейсшиной. Он позволяет строить параллельные отрезки. Объясните принцип устройства этого прибора.

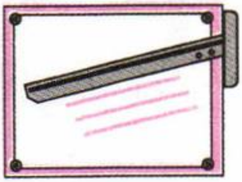


Рис. 232

7.7. Два корабля идут параллельными курсами. Каким образом это могут обеспечить штурманы этих кораблей?

7.2. Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности

Задача о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними всегда имеет решение, и притом единственное (по первому признаку равенства треугольников). Рассмотрим задачу, соответствующую второму признаку равенства треугольников.

Задача. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Дано: отрезок AB, углы α и β (рис. 233).

Построить: треугольник ABC, у которого $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

Построение. Отложим по одну сторону от отрезка AB угол $BAM = \alpha$ и угол $ABN = \beta$. Если их стороны AM и BN пересекутся в некоторой точке C, то треугольник ABC будет искомым (рис. 234).

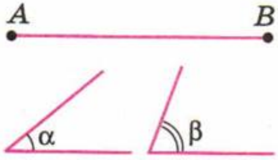


Рис. 233

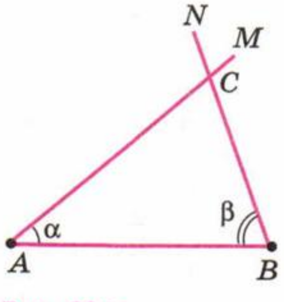


Рис. 234

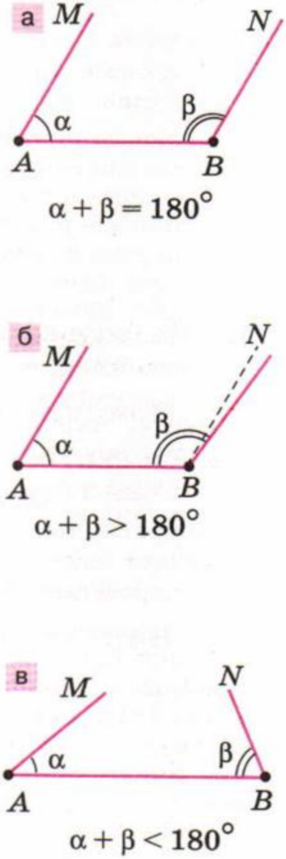


Рис. 235

Согласно второму признаку равенства треугольников (задача 4.32) решение может быть лишь одно. Это означает, что равны все треугольники, имеющие сторону, равную AB, и углы, прилегающие к этой стороне, равные α и β.

Исследуем, всегда ли задача имеет решение. Не всегда. Если $\alpha + \beta = 180^\circ$, то по первому признаку параллельности прямых (теорема 8) прямые AM и BN параллельны. Поэтому лучи AM и BN не пересекутся и треугольник не получится (рис. 235, а). Решения нет.

Тем более лучи AM и BN не пересекутся, если $\alpha + \beta > 180^\circ$ (рис. 235, б). В этом случае тоже решения нет.

Остаётся случай, когда $\alpha + \beta < 180^\circ$ (рис. 235, в). Можно ли доказать, что в этом случае лучи AM и BN пересекутся? Оказывается, что без дополнительных аксиом это доказать нельзя!

Но это можно сделать, опираясь на **пятый постулат**, который Евклид ввёл в своих «Началах»: **требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.**

В пятом постулате фактически и говорится о том, что можно построить треугольник ABC, если $\alpha + \beta < 180^\circ$. Сейчас обычно пятый постулат заменяют такой аксиомой:

Аксиома (*параллельности*). Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой (рис. 236).

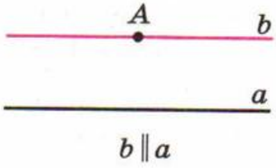


Рис. 236

Из аксиомы параллельности вытекают два полезных следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1 **На плоскости две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу** (рис. 237, а).

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что a параллельна b. Снова применим способ от противного. Допустим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке A (рис. 237, б). Тогда через точку A проходят две прямые, параллельные прямой c. А это противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны. ■

Замечание. Так же и в пространстве две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу.

СЛЕДСТВИЕ 2 **Если три прямые лежат в одной плоскости, две из них параллельны, а третья пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.**

Доказательство. Пусть прямые a, b, c лежат в одной плоскости, прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке A (рис. 238). Покажем, что прямая c пересекает прямую b. Снова применим способ от противного. Допустим, что прямая c не пересекает прямую b. Тогда прямая c параллельна прямой b. В этом случае через точку A пройдут две прямые a и c, параллельные прямой b. А это противоречит аксиоме о единственности параллельной прямой. Следовательно, прямая c пересекает прямую b. ■

Хотя формулировка пятого постулата Евклида (по сравнению с другими его постулатами) достаточно сложная, но в некоторых случаях мы будем на него ссылаться. Это допустимо, так как его утверждение легко вытекает из аксиомы параллельности и уже доказанных нами утверждений. Убедимся в этом.

Пусть прямые a и b образуют с прямой c внутренние односторонние углы α и β, в сумме меньшие $180°$ (рис. 239). Тогда через точку A проходит прямая d, отличная от прямой b и образующая с прямой c такой угол γ, который в сумме

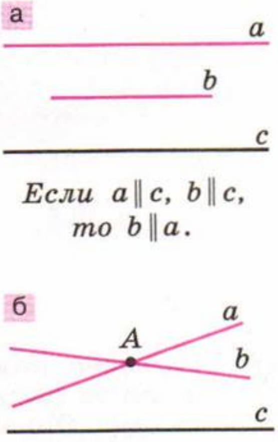
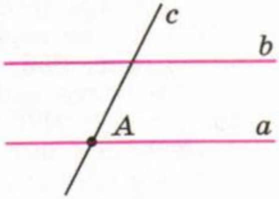
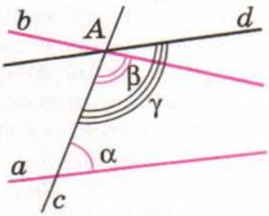


Рис. 237



$a \parallel b$

Рис. 238



$\alpha + \beta < 180°$

$\alpha + \gamma = 180°$

Рис. 239

с углом β равен 180°. Согласно первому признаку параллельности прямые a и d параллельны. Но тогда, в силу аксиомы о единственности параллельной, прямые a и b пересекаются. Пересечься они могут лишь с той стороны, где расположены углы α и β.

Вопросы для самоконтроля

1. Сколько можно провести через данную точку прямых, параллельных данной прямой?
2. Какие следствия можно получить из аксиомы параллельности?
3. О чём говорит пятый постулат Евклида?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.8. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из одной точки на параллельные прямые, лежат на одной прямой.

Рисуем

7.9. Нарисуйте: а) три прямые так, чтобы они разбили плоскость на шесть частей; б) четыре прямые так, чтобы они разбили плоскость на девять частей; в) пять прямых так, чтобы они разбили плоскость на двенадцать частей.

Представляем

7.10. На сколько частей разбивают плоскость параллельные друг другу прямые, если их: а) две; б) три; в) четыре; г) десять?

7.11. Сколько проведено параллельных прямых на плоскости, если плоскость разбита ими на десять частей?

7.12. В круге провели все хорды, параллельные друг другу. Какую фигуру образуют их середины?

Рассуждаем

7.13. Как расположены на плоскости две прямые, если известно, что каждая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую?

7.14. О трёх прямых на плоскости было сказано, что среди них: 1) две параллельные прямые; 2) две пересекающиеся прямые. Могут ли быть верными одновременно оба эти утверждения?

7.15. Вам известны три признака параллельности прямых. Пятый постулат Евклида является *признаком непараллельности прямых*. Сформулируйте ещё признаки *непараллельности* прямых.

Применяем геометрию

7.16. Лист бумаги лежит на прямоугольном столе. Его нижний край совпадает с краем стола. Объясните, почему его верхний край параллелен другому краю стола.

7.17. Два листа бумаги расположены так, что их нижние края параллельны. Почему попарно параллельны и другие их края?

▲ 7.3. Проблема пятого постулата

Сложность формулировки пятого постулата Евклида по сравнению с другими его постулатами и аксиомами побудила геометров, начиная с современников Евклида, искать доказательства пятого постулата, опирающиеся только на другие постулаты и аксиомы. Многим казалось, что это им удалось, но потом выяснялось, что они лишь заменяли пятый постулат или (что равносильно) аксиому параллельности Евклида каким-либо равносильным им утверждением. Пытались доказать аксиому методом от противного, прийти к противоречию. Но противоречия не получалось.

В итоге в начале XIX в. одновременно у нескольких математиков возникла мысль, что противоречия может и не получиться, что мыслима другая геометрия — та, в которой выполняется аксиома: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.

Первым сказал о том, что пятый постулат не может быть выведен из остальных аксиом геометрии Евклида, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) в докладе на заседании учёного совета физико-математического факультета 12 февраля 1826 г. Лобачевский построил неевклидову геометрию (он называл её воображаемой геометрией), в которой не выполняется пятый постулат. Подробное изложение этой геометрии вышло в 1829—1830 гг.

В 1832 г. была опубликована работа венгерского математика Яноша Бойяи (1802—1860), в которой, как и у Лобачевского, была построена неевклидова геометрия. В истории науки часто так бывает, что решение одной и той же задачи получают почти одновременно и независимо друг от друга учёные разных стран. К тем же выводам, что и Лобачевский и Бойяи, в начале XIX в. пришёл и немецкий математик Карл Гаусс (1777—1855). Но он не опубликовал их, опасаясь, как он сам объяснял, быть непонятым и подвергнуться нападкам.

Его опасения не были напрасными. Лобачевский подвергался насмешкам, а некоторые считали его чуть ли не сумасшедшим. Но он имел мужество продолжать свои исследования и публиковать одну за другой работы по неевклидовой геометрии. Когда же после смерти Лобачевского эта геометрия была понята, её стали называть **геометрией Лобачевского.** А самого Лобачевского стали сравнивать с Коперником. Действительно, переворот, произведённый Лобачевским в геометрии, можно сравнить с переворотом в астрономии, произведённым Коперником. ▼

7.4. Свойства углов, образованных параллельными и секущей

Три утверждения, которые мы сейчас докажем, являются утверждениями, обратными к трём признакам параллельности прямых, доказанным в п. 7.1 (теорема 8). Их краткие формулировки содержатся на рисунке 240. Сравните этот рисунок с рисунком 225 и вспомните, как связаны друг с другом формулировки взаимно обратных утверждений. Поменяв местами условие и заключение в каждом из признаков параллельности, вы получите такие три утверждения.

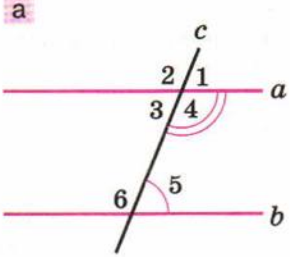
СВОЙСТВО 1 Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то сумма образованных ими внутренних односторонних углов равна $180°$ (рис. 240, а).

СВОЙСТВО 2 Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими внутренние накрест лежащие углы равны (рис. 240, б).

СВОЙСТВО 3 Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими соответственные углы равны (рис. 240, в).

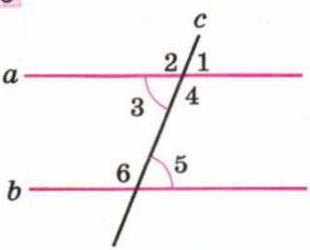
Доказать достаточно одно из этих трёх свойств: другие два будут следствиями доказанного. Докажем, например, свойство 3, применив снова способ от противного.

а



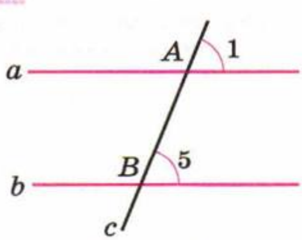
Если $a \parallel b$, то $\angle 4 + \angle 5 = 180°$.

б



Если $a \parallel b$, то $\angle 3 = \angle 5$.

в



Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 5$.

Рис. 240

Доказательство. Пусть две параллельные прямые a и b пересекают третью прямую c в точках A и B соответственно (рис. 240, в). Допустим, что $\angle 1 \neq \angle 5$. Тогда через точку B проведём прямую d, которая наклонена к прямой c под углом α, равным углу 1 (рис. 241). Она не совпадает с прямой b. Прямые a и d параллельны по третьему признаку параллельности прямых (теорема 8 п. 7.1). Но тогда через точку B пройдут две прямые b и d, параллельные прямой a. А это противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, $\angle 1 = \angle 5$. ■

Мы доказали свойство 3. Свойства 2 и 1 вытекают из свойства 3. □ Действительно, поскольку $\angle 1 = \angle 5$ и $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 3 = \angle 5$ (см. рис. 240, б). Так как $\angle 4 = \angle 6$ и $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$, то $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ (см. рис. 240, а). ■

В заключение отметим, что частным случаем каждого из этих трёх свойств является такое утверждение:

СВОЙСТВО 4 Если на плоскости прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой из них.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, вы узнали в этом пункте?
2. Получите свойства 2 и 3 как следствия свойства 1.

ЗАДАЧИ

Смотрим

7.18. На рисунке 242 прямые a и b параллельны. Найдите на рисунке величины углов, отмеченных цифрами.

7.19. На рисунке 243 прямые a и b параллельны. Укажите пары равных углов на этом рисунке.

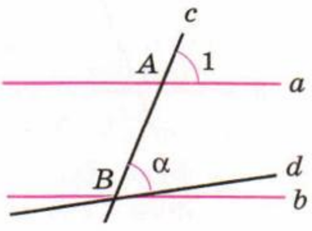


Рис. 241

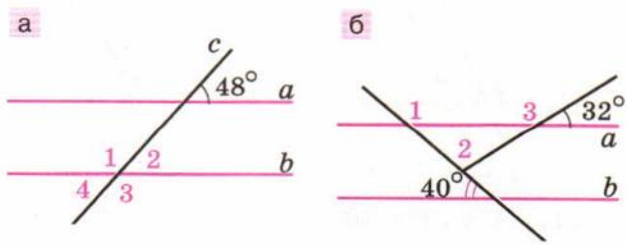


Рис. 242

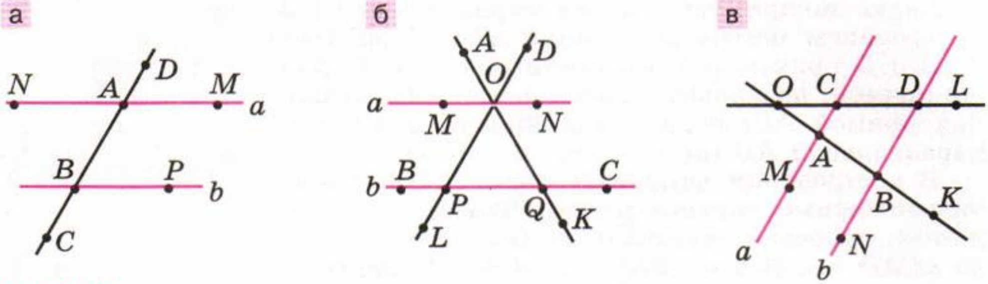


Рис. 243

Доказываем

7.20. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника проходит прямая, параллельная основанию этого треугольника. Докажите, что эта прямая проходит через середину другой боковой стороны.

7.21. Через концы диаметра окружности проведены параллельные хорды. Докажите, что эти хорды: а) равны; б) являются сторонами прямоугольника, диагонали которого — диаметры данной окружности.

7.22. Отрезки AB и CD — две параллельные хорды одной окружности. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

7.23. Прямая a параллельна основанию BC равнобедренного треугольника ABC и пересекает его боковые стороны AB и AC в точках K и M. Докажите, что треугольник AKM равнобедренный.

7.5. Построение прямоугольника

Среди окружающих нас предметов, сделанных руками человека, больше всего предметов прямоугольной формы: книги и тетради, оконные и дверные проёмы, дощечки паркета и плитки кафеля и т. д. Так что в практике построение прямоугольников происходит постоянно уже много тысяч лет.

Выполнить же в теории построение прямоугольника мы можем лишь теперь, после того как нами доказаны утверждения о параллельных прямых.

□ Как построить прямоугольник с заданными сторонами a и b? Один из способов построения таков.

Построим прямой угол A (рис. 244, а). На его сторонах отложим отрезки $AB = b$ и $AD = a$. Через точки B и D проведём прямые $p \perp AB$ и $q \perp AD$. Так как $p \perp AB$ и $AD \perp AB$, то $p \parallel AD$. А поскольку прямая q пересекает прямую AD, то она пересекает и параллельную ей прямую p в некоторой точке C. В построенном четырёхугольнике $ABCD$ три угла A, B и D прямые (по построению), а угол C также прямой, поскольку прямая q, перпендикулярная прямой AD, перпендикулярна и прямой p, параллельной AD (по свойству 4 п. 7.4).

В построенном четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны. Чтобы убедиться в этом, проведём диагональ AC (рис. 244, б). Тогда $\angle CAD = \angle BCA$ и $\angle BAC = \angle DCA$ (как внутренние накрест лежащие). Следовательно,

$\triangle ACD = \triangle CAB$ по второму признаку.

Поэтому

$AB = DC = b$ и $AD = BC = a$. ■

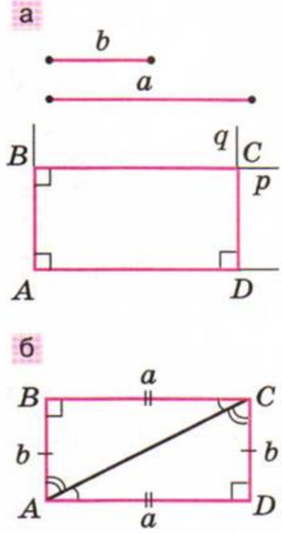


Рис. 244

Решая задачу о построении прямоугольника с заданными сторонами, мы доказали такой полезный *признак прямоугольника*: **четырёхугольник, имеющий три прямых угла, является прямоугольником.**

Есть и другие способы построения прямоугольников. Например, получится прямоугольник, если сложить два равных прямоугольных треугольника, как на рисунке 245. Постарайтесь это обосновать. Поищите ещё способы построения прямоугольника с заданными сторонами.

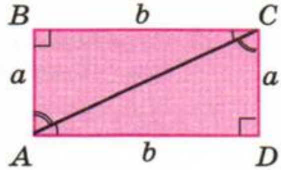


Рис. 245

Поскольку прямоугольник однозначно задаётся своими сторонами, то **равными называются такие прямоугольники, у которых стороны соответственно равны** (рис. 246).

Длины сторон прямоугольника называются его **измерениями**.

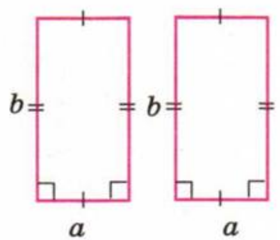


Рис. 246

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется прямоугольником?
2. Какие способы построения прямоугольника вы можете предложить?
3. Какой признак прямоугольника вы знаете?
4. Приведите примеры предметов, имеющих форму прямоугольника.
5. Какие прямоугольники называют равными?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.24. Докажите следующие свойства прямоугольника: а) противоположные стороны прямоугольника параллельны друг другу; б) диагональ прямоугольника разбивает его на два равных треугольника; в) диагонали прямоугольника равны; г) точка пересечения диагоналей прямоугольника является его центром симметрии.

7.25. Докажите следующие свойства квадрата: а) диагонали квадрата являются биссектрисами его углов и взаимно перпендикулярны; б) точка пересечения диагоналей квадрата делит их пополам.

7.26. **Средней линией четырёхугольника** называется отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон. Докажите, что: а) средняя линия прямоугольника параллельна его стороне и разбивает его на два прямоугольника; б) средние линии прямоугольника параллельны его сторонам и разбивают прямоугольник на четыре равных прямоугольника.

Смотрим

7.27. Назовите прямоугольники на рисунке 247.

7.28. Назовите квадраты на рисунке 248 на с. 152.

Строим

7.29. Постройте прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Измерьте его диагонали. Что получилось?

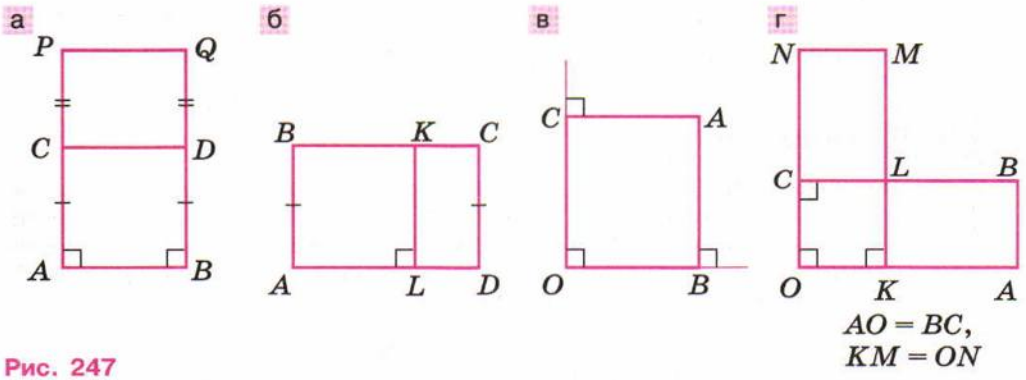


Рис. 247

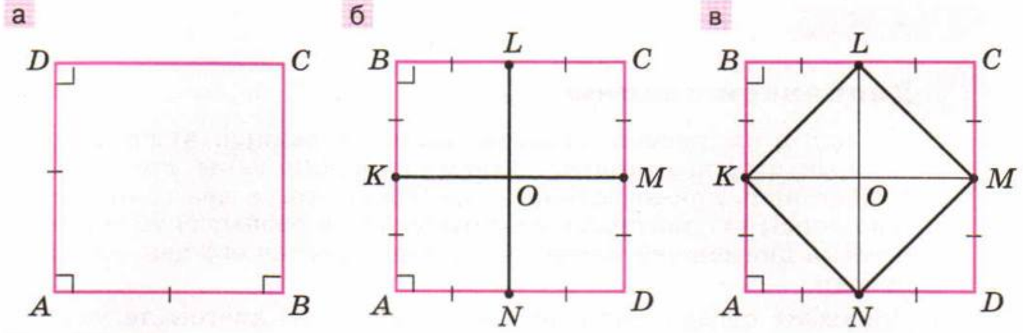


Рис. 248

7.30. Нарисуйте прямоугольный треугольник. Достройте его до прямоугольника, две стороны которого являются катетами треугольника.

7.31. Нарисуйте равнобедренный прямоугольный треугольник. Достройте его до квадрата, две стороны которого являются катетами треугольника.

7.32. Постройте квадрат с данной диагональю.

Представляем

7.33. Сколько осей симметрии у прямоугольника? Как они проходят? Сделайте рисунки.

7.34. Сколько осей симметрии у квадрата? Как они проходят? Сделайте рисунки. Сравните расположение осей симметрии квадрата и произвольного прямоугольника.

Находим величину

7.35. Периметр прямоугольника равен 1. Чему равны его стороны, если одна из сторон: а) в 2 раза больше другой; б) на 0,1 больше другой; в) составляет 25% от другой?

Планируем

7.36. Как разделить прямоугольник на: а) два прямоугольника; б) три прямоугольника; в) четыре прямоугольника; г) два равных треугольника; д) четыре равных треугольника; е) восемь равных треугольников; ж) две такие части, из которых можно составить равнобедренный треугольник?

7.37. Как сделать прямоугольник, у которого диагональ: а) в 2 раза больше меньшей стороны; б) делит его угол пополам?

Доказываем

7.38. Докажите, что: а) хорда прямоугольника, перпендикулярная его стороне, делит его на два прямоугольника; б) хорды прямоугольника, соответственно перпендикулярные его соседним сторонам, перпендикулярны между собой.

7.39. Докажите, что противоположные грани прямоугольного параллелепипеда равны.

Исследуем

7.40. Равны ли прямоугольники, если равны их периметры?

7.41. Можно ли восстановить прямоугольник, если на рисунке остались такие его элементы: а) сторона и вершина вне её; б) сторона и точка на противоположной стороне; в) диагональ и точка на другой диагонали; г) хорда между серединами противоположных сторон и точка на соседней к ним стороне; д) точка пересечения диагоналей и две точки на противоположных сторонах?

7.42. Федя нарисовал на доске прямоугольник. Но пришёл Вася, нарисовал его среднюю линию, а сам прямоугольник стёр. Сможет ли Федя восстановить исходный прямоугольник? А если от этого прямоугольника останется ещё и одна точка? Придумайте сами похожие задачи.

Применяем геометрию

7.43. Прямоугольный лист бумаги согнули пополам, а затем полученный лист тоже согнули пополам. От того угла, где оказался центр прямоугольника (центр его симметрии — точка пересечения диагоналей), отрезали: а) треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник. Можете ли вы, не разворачивая лист, сказать, какой будет форма дыры?

7.44. Придумайте прибор для измерения толщины бревна в любом месте.

7.45. Вы идёте лесом по прямой и вдруг вы увидели болото. Как его обойти, чтобы при этом выйти на ту же прямую, по которой вы шли?

7.46. Различные упаковки продовольственных товаров (для молока, сока и т. п.) изготовлены из картонных прямоугольников, которые по краям склеивают и из которых, перегибая их, делают прямоугольные параллелепипеды или тетраэдры. Выясните, как это делается. Нарисуйте прямоугольник и отметьте участки склеивания и линии сгибов.

▲ 7.6. Полоса

Слово *параллельная* в переводе с греческого означает *идущая рядом*. Более того, можно сказать, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга. Поясним это.

Пусть a и b — параллельные прямые. Возьмём на прямой a две точки A и B и опустим из них перпендикуляры AD и BC на прямую b (рис. 249, а). Получим четырёхугольник $ABCD$, все углы которого прямые (по свойству 4 п. 7.3). Поэтому $ABCD$ — прямоугольник (по признаку п. 7.5). А в прямоугольнике противоположные стороны равны. Поэтому $AD = CB$.

Отрезок AD (и BC) перпендикулярен прямым a и b, а потому называется **общим перпендикуляром прямых** a и b. Мы доказали два утверждения:

1. Из каждой точки одной из параллельных прямых до другой идёт общий перпендикуляр.

2. Все общие перпендикуляры двух параллельных прямых равны друг другу и параллельны.

Эти два утверждения и означают, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга.

Часть плоскости между параллельными прямыми назовём **полосой**. Можно сказать, что параллельные прямые ограничивают полосу постоянной ширины. **Ширина полосы** — это длина общего перпендикуляра параллельных прямых, ограничивающих полосу (рис. 249, б).

Расстоянием между параллельными прямыми является ширина полосы между ними.

Действительно, общий перпендикуляр этих прямых является кратчайшим отрезком, соединяющим точки этих прямых (рис. 249, в).

Наглядную картину этих утверждений дают уходящие вдаль рельсы прямой железной дороги. Их общие перпендикуляры представлены, хотя и несколько грубо, шпалами. Параллельность рельсов проверяют именно по постоянству расстояния, перемещая вдоль них соответствующий шаблон. ▼

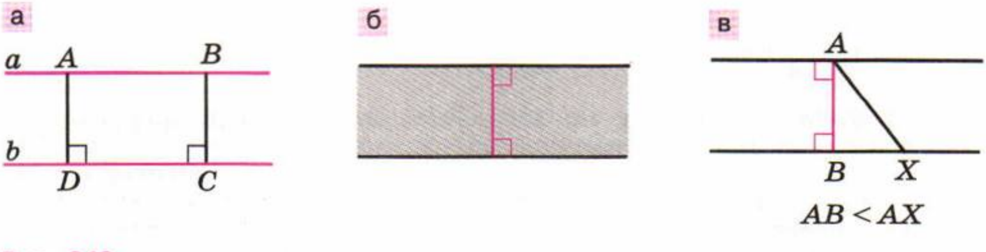


Рис. 249

§ 8. Сумма углов треугольника

8.1. Теорема о сумме углов треугольника

Свойства параллельных прямых помогут нам доказать важнейшую теорему.

Теорема 9 (*о сумме углов треугольника*). **Сумма углов треугольника равна 180°.**

Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательство. Проведём через вершину C прямую p, параллельную прямой AB (рис. 250). Тогда с той стороны от прямой p, где лежит треугольник ABC, образуются три угла с вершиной C: $\angle C$ треугольника ABC, $\angle 1$ — внутренний накрест лежащий с углом A и $\angle 2$ — внутренний накрест лежащий с углом B. Эти три угла в сумме дают развёрнутый угол. Поэтому

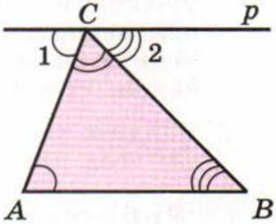


Рис. 250

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180°. \quad (1)$$

Но $\angle 1 = \angle A$ (как внутренний накрест лежащий при параллельных прямых p и AB и секущей AC). Аналогично $\angle 2 = \angle B$ (при тех же параллельных и секущей BC). Заменяя в равенстве (1) угол 1 углом A, угол 2 углом B, получаем, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. На чём основано доказательство теоремы о сумме углов треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

8.1. Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

8.2. Докажите, что: а) катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы; б) катет, равный половине гипотенузы, лежит против угла 30°.

Находим величину

8.3. Вычислите неизвестные углы на рисунке 251.

8.4. Вычислите третий угол треугольника, в котором два угла равны: а) $70°$ и $100°$; б) $63°20'$ и $70°40'$; в) $10°10'20''$ и $20°40'42''$.

8.5. Установите вид треугольника ABC, если: а) $\angle B = 2\angle A$, $\angle C = 3\angle A$; б) $\angle B = 2\angle C$, $\angle A = 6\angle C$; в) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$; г) $\angle A$ на $45°$ больше $\angle B$, а $\angle C$ на $45°$ больше $\angle A$.

8.6. Вычислите углы равнобедренного треугольника, в котором угол при вершине: а) на $30°$ больше угла при основании; б) на $60°$ меньше угла при основании; в) в 2 раза больше угла при основании; г) в 4 раза меньше угла при основании.

8.7. Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если его угол при основании равен $45°$.

Работаем с формулой

8.8. Пусть α — угол при основании равнобедренного треугольника, а β — угол при его вершине. а) Запишите формулу, связывающую эти величины. б) Выразите из этой формулы угол при вершине. в) Выразите из неё угол при основании. г) Пусть угол

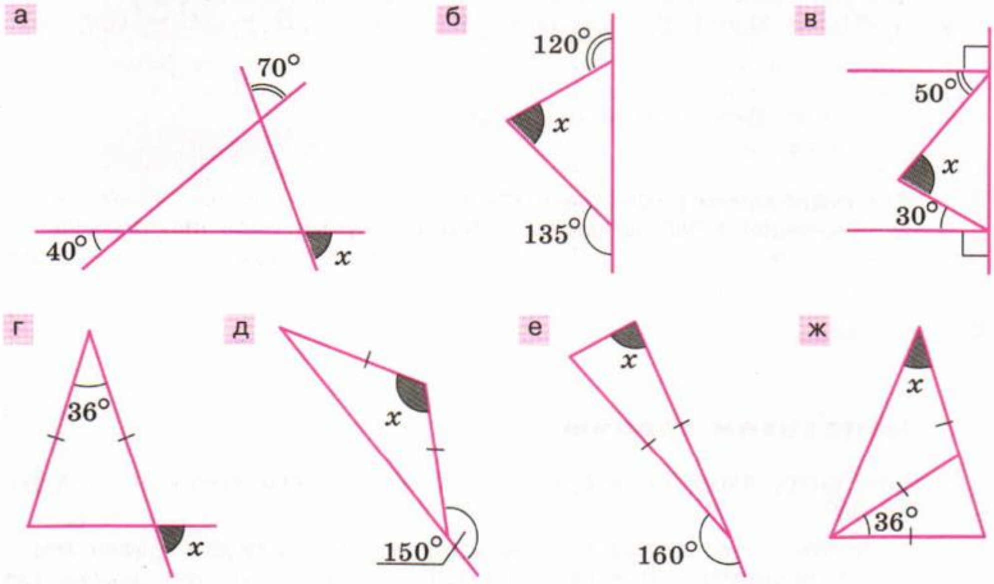


Рис. 251

при основании стал расти. Что будет происходить с углом при вершине? д) Пусть угол при вершине стал увеличиваться. Что будет происходить с углом при основании?

Планируем

8.9. Пусть известны углы, которые высота треугольника составляет со сторонами, проведёнными из той же вершины. Как найти угол, который высота составляет с биссектрисой, проведённой из той же вершины?

8.10. Известен острый угол неравнобедренного прямоугольного треугольника. Как найти все углы полученных на рисунке треугольников, если провести из вершины прямого угла: а) высоту; б) высоту и медиану; в) высоту, медиану и биссектрису?

8.11. Как найти угол между биссектрисами двух углов треугольника, если известен третий угол этого треугольника?

8.12. Как вычислить неизвестные углы на рисунке 252?

8.13. В тетраэдре $ABCD$ $AB = BC = AC$ и $DA = DB = DC$. Известен угол ADB. Как найти остальные углы граней этого тетраэдра?

Ищем границы

8.14. Один из углов треугольника лежит в границах между 20° и 21°, другой угол треугольника лежит в границах между 30° и 31°. В каких границах лежит третий угол треугольника?

8.15. В каких границах лежат меньший и больший углы треугольника, когда треугольник: а) прямоугольный; б) равнобедренный; в) произвольный?

Исследуем

8.16. На сторонах равностороннего треугольника во внешнюю сторону построено три таких же треугольника. Какой фигурой является объединение всех четырёх треугольников? Докажите свою гипотезу.

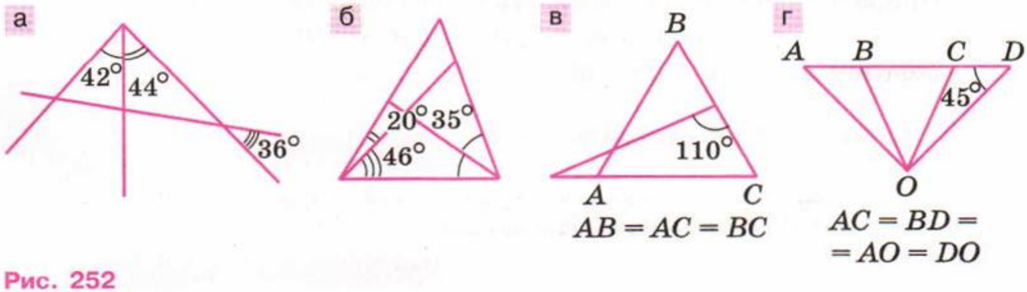


Рис. 252

8.17. Можете ли вы найти третий угол равнобедренного треугольника, в котором один из углов: а) $15°$; б) $80°$; в) $160°$?

8.18. Сколько углов на рисунке 253 должно быть известно, чтобы можно было узнать величину остальных?

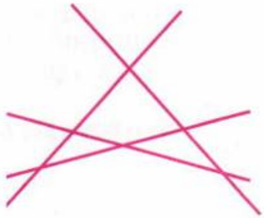


Рис. 253

Рассуждаем

8.19. Вася вычислял углы в треугольниках и получил такие ответы: а) $60°$, $80°$, $36°20'$; б) $50°10'$, $60°20'$, $100°20'20''$; в) $70°$, $80°$, $33°$; г) $61°$, $72°$, $83°$; д) $33°$, $66°$, $71°$. Можете ли вы без вычислений доказать, что в каждом случае Вася ошибся?

8.2. Следствия из теоремы о сумме углов треугольника

СЛЕДСТВИЕ 1 **Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.**

Доказательство. Прямой угол в прямоугольном треугольнике равен $90°$. Поэтому сумма двух его острых углов равна

$$180° - 90° = 90°. \blacksquare$$

Таким образом, зная один из острых углов прямоугольного треугольника, можно найти другой его острый угол.

СЛЕДСТВИЕ 2 **Острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника равен $45°$.**

СЛЕДСТВИЕ 3 **Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним углов треугольника.**

Доказательство. Пусть α — внешний угол треугольника ABC, смежный с углом A. Тогда $\alpha + \angle A = 180°$. Кроме того,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Приравниваем левые части этих равенств. Получим, что

$$\alpha + \angle A = \angle A + \angle B + \angle C,$$

поэтому $\alpha = \angle B + \angle C$. $\blacksquare$

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
2. Чему равен внешний угол треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

8.20. а) Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с такими же углами, что и у данного треугольника. б) Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

8.21. Сформулируйте и докажите ещё два признака равенства прямоугольных треугольников: а) по гипотенузе и острому углу; б) по катету и противолежащему острому углу.

8.22. Докажите, что сумма углов любого четырёхугольника равна 360°.

Находим величину

8.23. Найдите неизвестные углы на рисунке 254.

Ищем границы

8.24. Один из острых углов прямоугольного треугольника больше 25°. В каких границах лежит другой острый угол?

Работаем с формулой

8.25. Пусть α и β — острые углы прямоугольного треугольника. а) Запишите формулу, связывающую эти величины. б) Выразите из этой формулы каждый из углов. в) Пусть один из острых углов увеличивается. Что происходит с другим? г) Во сколько раз один из этих углов может быть больше другого?

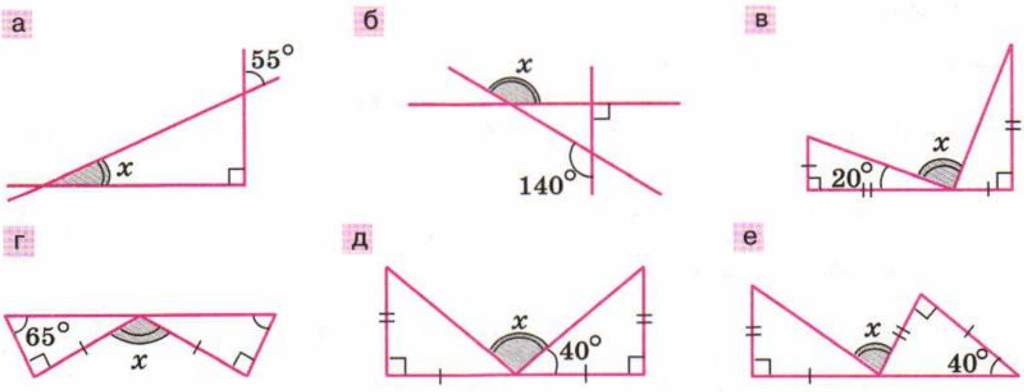


Рис. 254

Рассмотрим решение. а) Так как сумма всех углов прямоугольного треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, то на долю двух острых углов α и β такого треугольника приходятся оставшиеся 90°. Таким образом получаем нужную формулу: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

б) Каждый из углов в этой формуле можно выразить через другой угол, так как каждое слагаемое можно найти, зная всю сумму и другое слагаемое. Получаем $\alpha = 90^\circ - \beta$, $\beta = 90^\circ - \alpha$.

в) Теперь мы можем поработать с этой формулой, чтобы её лучше понять. Для начала попробуем изменять один из острых углов, например увеличивать угол α. Что же будет происходить с другим острым углом — углом β?

Посмотрим на формулу, в которой угол β выражен через угол α. В этой формуле угол α является вычитаемым. А что происходит с разностью при увеличении вычитаемого, вы знаете. Она уменьшается. Значит, угол β будет уменьшаться при увеличении угла α.

Это легко увидеть и на рисунке. Нарисуйте два прямоугольных треугольника, да такие, что в одном из них угол α заметно больше, чем в другом. Ответ про угол сразу будет ясен. Правда, увидеть результат — это ещё не доказать его. (Теперь вы легко сообразите, как будет меняться угол α при изменении угла β. И как же?)

г) На последний вопрос стоит сначала дать предварительный ответ из наглядных соображений. А потом уже начать логически обосновывать, например, так: один из острых углов может стать маленьким (очень маленьким и даже сколь угодно маленьким), а второй угол будет в это время около 90°. Поэтому отношение второго угла к первому может стать сколь угодно большим числом. Ведь всякая положительная дробь за счёт уменьшения знаменателя только увеличивается (при постоянном числителе). Ну и наконец, вы можете написать соответствующие формулы и получить нужный результат уже из них.

Планируем

8.26. В остроугольном треугольнике известны углы между его высотами. Как найти углы треугольника?

8.27. В треугольнике известны углы между его биссектрисами. Как найти углы треугольника?

8.28. Как найти внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, если известен угол при его основании? Как использовать полученный результат для: а) деления угла пополам; б) удвоения угла?

8.29. Пусть известен угол при вершине равнобедренного треугольника. Как найти: а) внешний угол при основании треугольника; б) угол между биссектрисами внешних углов при разных вершинах основания; в) угол между биссектрисой внешнего угла при основании и внешнего угла при вершине?

8.30. Из некоторой точки треугольника проведены перпендикуляры на все его стороны. Пусть известны два угла между этими перпендикулярами. Как найти углы треугольника?

8.31. В круге радиусом 1 проведены два перпендикулярных диаметра. Из точки A окружности, не лежащей на этих диаметрах, проведены к ним перпендикуляры AB и AC. Как найти BC?

8.32. Как составить квадрат из: а) двух прямоугольных треугольников; б) двух прямоугольников; в) четырёх прямоугольных треугольников; г) трёх треугольников?

8.33. Как построить квадрат по: а) стороне; б) диагонали; в) сумме стороны и диагонали?

Исследуем

8.34. Можно ли покрыть плоскость одинаковыми треугольниками?

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

Находим величину

III.1. Запишите формулу для вычисления периметра P прямоугольника со сторонами a и b. а) Выразите из этой формулы величину каждой из сторон. б) На сколько увеличится периметр, если одна из сторон увеличится на c? в) На сколько уменьшится периметр, если одна из сторон уменьшится на c? г) Как изменится периметр, если одна из сторон изменилась на величину x, а другая изменилась на величину y? д) Как изменится периметр, если каждая из сторон увеличится в 2 раза? уменьшится в 3 раза? е) Что сделать со сторонами, чтобы увеличить периметр на величину q? уменьшить на величину q? ж) Что сделать со сторонами, чтобы увеличить периметр в 5 раз? уменьшить в 10 раз? з) Пусть сторона a стала увеличиваться, а периметр остаётся постоянным. Что происходит со стороной b? и) Пусть одна из сторон увеличилась на величину c. Что произошло с другой стороной прямоугольника, если периметр его не изменился? к) Пусть одна из сторон прямоугольника увеличилась в 2 раза. Что произошло с другой его стороной, если периметр не изменился? л) Нарисуйте график зависимости одной стороны прямоугольника от другой при постоянном периметре.

III.2. Для многогранника, имеющего n вершин, произведите вычисление: из числа $360^\circ n$ вычтите сумму углов всех граней этого многогранника. Такое вычисление сделайте для: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильного тетраэдра; в) произвольного тетраэдра; г) четырёхугольной пирамиды. Сравните результаты. Придумайте ещё какой-нибудь многогранник (например, куб, на который поставлена четырёхугольная пирамида) и проведите указанное вычисление. Что получилось?

Ищем границы

III.3. а) Пусть периметр равнобедренного треугольника равен 1. В каких границах лежит его основание? боковая сторона? б) Периметр треугольника равен 10. В каких границах лежит его наибольшая сторона?

III.4. Внутри треугольника ABC с известными сторонами взяли точку O. Оцените сумму её расстояний до всех вершин треугольника.

III.5. Нарисуйте три прямые на плоскости. Сколько получилось точек пересечения? Может ли получиться меньшее число точек? А большее? Какое наибольшее число точек пересечения может получиться у четырёх прямых? А у n прямых?

Планируем

III.6. Как через вершину треугольника провести прямую, которая равноудалена от двух других вершин треугольника?

III.7. Равносторонний треугольник хотят накрыть полосой. Как найти наименьшую ширину такой полосы? Как найти наименьшую ширину полосы, если треугольник равнобедренный? разносторонний?

III.8. Отметьте две точки. Как провести через них такие две параллельные прямые, которые ограничивают полосу заданной ширины?

III.9. Нарисуйте полосу и внутри её возьмите точку. Как нарисовать такую хорду полосы, которая проходит через данную точку и: а) имеет заданную длину; б) делится этой точкой пополам?

III.10. Как из данной полосы вырезать равносторонний треугольник с вершинами на её краях?

III.11. Как разбить плоскость прямыми на 20 частей? на 21 часть? на n частей?

III.12. Внутри угла взяли точку. Как провести такую хорду угла, которая данной точкой делилась бы пополам?

Доказываем

III.13. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание. Докажите, что больший периметр имеет тот из них, у которого угол при вершине меньше.

III.14. Докажите, что любой треугольник, лежащий внутри данного треугольника, имеет периметр, меньший, чем периметр данного треугольника.

III.15. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Внутри его взята точка и соединена со всеми вершинами треугольника. Полученные отрезки обозначим a_1, b_1, c_1. Докажите, что

$$a_1 + b_1 + c_1 < a + b + c < 2\,(a_1 + b_1 + c_1).$$

III.16. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.

III.17. Докажите, что самая длинная хорда четырёхугольника является его стороной или диагональю. Обобщите это утверждение. Как это обобщение выглядит для пространственных фигур?

III.18. а) Докажите, что средняя линия полосы делит пополам любую её хорду с концами на разных краях полосы. б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

III.19. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если у них соответственно равны: а) боковые стороны и углы при основании; б) основания и углы при вершине.

III.20. Дан угол и две параллельные прямые, пересекающие стороны угла. Пусть одна из этих прямых отсекает на сторонах угла равные отрезки. а) Докажите, что и другая прямая обладает тем же свойством. б) Докажите, что полученный результат не изменится, если другая прямая будет пересекать не стороны угла, а их продолжения. в) Докажите, что верны обратные утверждения. На их основе сформулируйте признак параллельности прямых. г) Какие из полученных утверждений верны, если в условии задачи параллельные прямые заменить на параллельные плоскости?

III.21. а) Два равных треугольника ABC_1 и ABC_2 расположены с одной стороны от прямой AB. Докажите, что прямые AB и C_1C_2 параллельны. б) Пусть в равнобедренном треугольнике из вершин основания проведены медианы. Докажите, что хорда, соединяющая их концы, параллельна основанию. в) Докажите, что такой же результат верен, если из вершин основания провести биссектрисы или высоты.

III.22. а) В равнобедренном треугольнике через вершину провели прямую, параллельную основанию. Докажите, что она делит пополам внешний угол треугольника при его вершине. б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Исследуем

III.23. Может ли внутри треугольника находиться треугольник с бóльшим периметром? Можно ли обобщить полученный вами результат?

III.24. С одной стороны от данной прямой взяты точки A и B. Какую точку C надо выбрать на данной прямой, чтобы длина ломаной ACB была наименьшей?

Применяем геометрию

III.25. Предположим, что вы имеете складной метр. Какие различные треугольники вы сможете из него сделать?

III.26. Длина куска проволоки имела целое число сантиметров. Из неё стали делать треугольник. Одну сторону треугольника сделали длиной 1 см, другую — 10 см. Какой же получилась третья сторона?

III.27. На листе бумаги нарисовали угол, а потом оторвали его вершину. Сможете ли вы построить его биссектрису?

III.28. Как на листе бумаги одними только сгибаниями получить параллельные прямые?

Участвуем в олимпиаде

III.29. На сторонах данного прямоугольника взяты точки A, B, C, D — на каждой стороне по точке. Каков наименьший периметр четырёхугольника $ABCD$?

III.30. Где внутри выпуклого четырёхугольника находится такая точка, что сумма расстояний от неё до его вершин наименьшая?

III.31. а) Каков кратчайший путь по поверхности куба между центрами двух его соседних граней? б) А каким он будет, если на таких же гранях взять другие точки?

Занимательная геометрия

III.32. Используя только двустороннюю линейку: а) разделите пополам данный угол; б) разделите пополам данный отрезок; в) удвойте данный угол; г) удвойте данный отрезок; д) восставьте перпендикуляр в данной точке прямой; е) проведите прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку; ж) проведите перпендикуляр из данной точки на данную прямую. (В двусторонней линейке используются оба её края.)

III.33. Как восстановить квадрат, если на рисунке остались такие его элементы: а) сторона; б) диагональ; в) середины двух противоположных сторон; г) середины двух смежных сторон; д) вершина и центр; е) центр и две точки на одной из сторон?

III.34. Пираты зарыли клад на острове. На карте местности они отметили положение трёх камней. О них известно, что они лежат в центре квадрата и на его сторонах, а сам клад зарыт в одной из вершин квадрата. Займётесь ли вы поисками клада?

Применяем компьютер

III.35. Постройте прямой угол с вершиной O. Внутри угла O возьмите точку A. Опустите из точки A перпендикуляры AB и AC на стороны угла O. Перемещая точку A, проверьте, что в каждом случае угол BAC — прямой.

III.36. Постройте треугольник, измерьте величины его углов. Перемещая вершины треугольника, проверьте, что в каждом случае сумма углов треугольника равна 180°.

III.37. Постройте прямоугольный треугольник (воспользовавшись командой для построения перпендикулярной прямой), измерьте величины его острых углов. Перемещая вершины треугольника, проверьте, что в каждом случае сумма острых углов треугольника равна 90°.

Дополнение. Аксиома прямоугольника и параллельность

1. Аксиома прямоугольника

Решая проблему пятого постулата (п. 7.3), геометры установили, какими предложениями геометрии можно было бы его заменить. Одно из них мы уже сформулировали — это аксиома параллельности (п. 7.2). Опираясь на аксиому параллельности, мы установили свойства углов, образованных прямой, пересекающей две параллельные прямые (п. 7.4), построили прямоугольник (п. 7.5) и доказали теорему о сумме углов треугольника (п. 8.1).

Оказывается, что пятый постулат можно заменить и утверждением о том, что **по любым двум отрезкам a и b можно построить прямоугольник со сторонами a и b.**

Построение это может быть таким, которое выполнено в п. 7.5. Там мы строили четырёхугольник с тремя прямыми углами и доказывали, опираясь на аксиому параллельности, что и четвёртый его

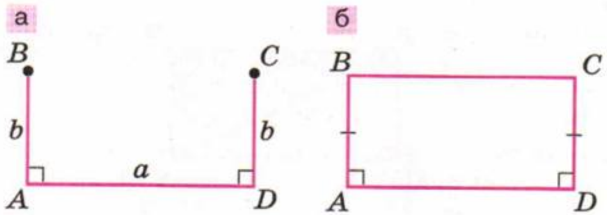


Рис. 255

угол прямой, а противоположные стороны равны. Но можно прямоугольник строить и так:

Проведём отрезок $AD = a$ и в одну сторону от прямой AD построим отрезки AB и DC, перпендикулярные прямой AD и равные отрезку b (рис. 255, а). Проведём отрезок BC и получим четырёхугольник $ABCD$ с двумя прямыми углами A и D и равными друг другу противоположными сторонами: $AB = DC = b$ (рис. 255, б). Такие четырёхугольники, занимаясь проблемой пятого постулата, рассматривал итальянский геометр Джованни Саккери (1667—1733), а потому их называют **четырёхугольниками Саккери**.

Опираясь на аксиому параллельности, можно доказать, что четырёхугольник Саккери — прямоугольник (сделайте это самостоятельно). Но без аксиомы параллельности (или равносильного ей утверждения) этого сделать нельзя. Предложением, что **четырёхугольник Саккери является прямоугольником**, можно заменить аксиому параллельности. Это предложение мы и назовём *аксиомой прямоугольника*. Докажем, опираясь на аксиому прямоугольника и не используя аксиому параллельности, теорему о сумме углов треугольника и предложение о единственности параллельной прямой.

2. Сумма углов треугольника

Сначала докажем, что **сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 256, а). Достроим его до прямоугольника Саккери $ADBC$ (рис. 256, б). По аксиоме прямоугольника четырёхугольник $ADBC$ — прямоугольник. Диагональ AB разбивает его на два равных прямоугольных треугольника ABC и ABD (рис. 256, в). Угол ABC равен углу BAD. Поэтому $\angle ABC + \angle BAC = \angle BAD + \angle BAC = \angle DAC = 90°$. ■

Теперь докажем, что **сумма углов треугольника равна 180°.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и в нём проведём ту его высоту, которая лежит в треугольнике. Пусть это будет высота AD (рис. 257). Сумма углов треугольника ABC является суммой острых углов двух прямоугольных треугольников ADB и ADC, т. е. равна 180°. ■

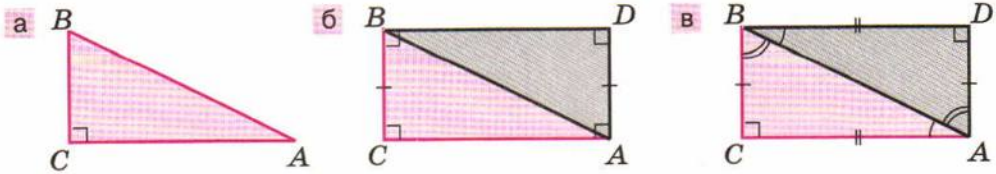
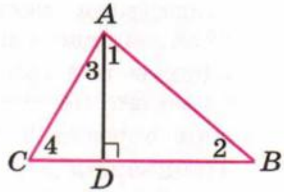


Рис. 256

3. Единственность параллельной прямой

Докажем теперь, опираясь на аксиому прямоугольника, что **через точку A, не лежащую на прямой a, проходит лишь одна (единственная) прямая, параллельная прямой a.**

Доказательство. Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a и проведём через A прямую b, перпендикулярную прямой AB (рис. 258, а). Прямые a и b параллельны (как две прямые, перпендикулярные прямой AB). Покажем, что любая прямая c, проходящая через точку A и отличная от прямой b, пересекает прямую a.



$\angle A + \angle B + \angle C =$
$= \angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 =$
$= \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$
$= 180^\circ$

Рис. 257

Можно считать, что прямая a горизонтальна, точка A лежит выше прямой a и прямая c образует острый угол с отрезком AB справа от AB (рис. 258, б). Отложим на прямых a и b вправо от точек A и B отрезки AK_1 и BM_1, равные отрезку AB (рис. 258, в). Согласно аксиоме прямоугольника четырёхугольник ABM_1K_1 — квадрат.

Если прямая c не пересекает отрезок BM_1, то она пересекает отрезок M_1K_1 в некоторой точке P_1. Положим $K_1P_1 = p$.

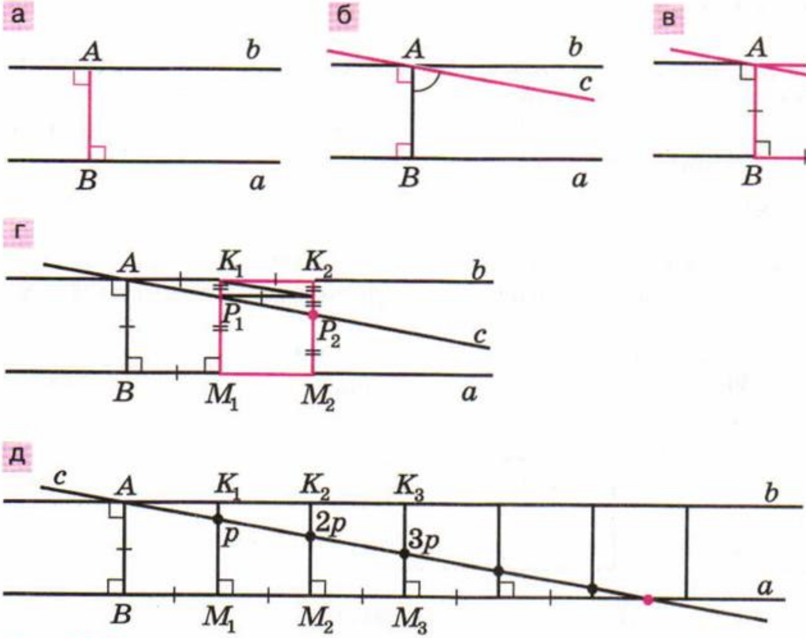


Рис. 258

Используя аксиому прямоугольника, пристроим к квадрату ABM_1K_1 вправо квадрат $M_1K_1K_2M_2$, две стороны которого лежат на прямых a и b (рис. 258, г). Если прямая c не пересекает отрезок BM_2, то она пересекает отрезок M_2K_2 в точке P_2. Отрезок K_2P_2 вдвое больше отрезка K_1P_1, т. е. $K_2P_2 = 2p$.

Продолжая эти построения квадратов в полосе между a и b, получим, что прямая c пересекает отрезки K_nM_n лишь до тех пор, пока выполняется неравенство $np < AB$. А после того как это неравенство нарушится, прямая c пересечёт прямую a (рис. 258, д). ■

Итак, опираясь на аксиому параллельности, мы построили прямоугольник, а затем, опираясь на аксиому прямоугольника, мы получили утверждение аксиомы параллельности. Следовательно, эти аксиомы равносильны.

Итоги

Завершается курс 7 класса. Выделим основное, изученное вами, вспомнив, какие задачи мы ставили перед курсом геометрии.

- Во-первых, вы научились *строить фигуры с теми или иными свойствами*.
- Во-вторых, вы стали *доказывать*, что построенные фигуры обладают требуемыми свойствами.
- В-третьих, вы узнали *об аксиомах*, на которые опираются доказательства остальных предложений геометрии.
- В-четвёртых, опираясь на эти аксиомы, вы *доказали девять теорем и вывели многие следствия из них*.
- В-пятых, вы начали знакомиться с *симметрией фигур*.
- В-шестых, вы научились *видеть и рисовать* геометрические фигуры.
- В-седьмых, *повысилась ваша логическая культура:* вы узнали о взаимно обратных утверждениях, о способе доказательства от противного и о других общематематических понятиях.
- В-восьмых, решая разнообразные задачи, выбирая различные способы их решения, вы постоянно *развиваете свои умственные способности*.
- Наконец, в-девятых, вы начали знакомство с богатой *историей геометрии*, узнали о *её применениях в практике*.

Это хороший итог ваших занятий геометрией в 7 классе и прочный фундамент для её изучения в дальнейшем.

ТЕСТЫ

Для итоговой проверки возможно использование нижеприведенных тестов. В каждом тесте содержится пять утверждений, на которые можно дать три вида ответов: положительный, если вы считаете это утверждение верным (кодируется знаком «+»), отрицательный, если вы считаете утверждение неверным (кодируется знаком «−»), и нейтральный, если вы не знаете, верное это утверждение или нет (кодируется знаком 0). За каждый правильный ответ ставится +1, за каждый неправильный ставится −1, за нейтральный ответ ставится 0. Таким образом, по каждому тесту можно набрать от +5 до −5 баллов. В тех случаях, когда утверждение для одних случаев верно, а для других — неверно, следует давать ответ «нет» (знак «−»). Аналогия: мы говорим, что равенство $(x+1)^2=x^2+1$ неверно, хотя при $x=0$ оно верно, а при других x — неверно.

Время на выполнение одного теста планируется учителем.

Во время выполнения теста можно делать любые записи по решению, которые можно не сдавать учителю.

Тест 1. Взаимное положение двух прямых

Две прямые пересекаются, если:

1) первая из них содержит одну диагональ данного четырёхугольника, а вторая содержит другую диагональ этого четырёхугольника;
2) первая из них лежит в данной плоскости, а вторая пересекает эту плоскость;
3) первая из них лежит в одной из пересекающихся плоскостей, а вторая лежит в другой из этих плоскостей;
4) первая из них содержит одно ребро данного тетраэдра, а вторая содержит другое ребро этого тетраэдра;
5) первая из них содержит одну диагональ данного куба, а вторая содержит другую диагональ этого куба.

Тест 2. Свойства равнобедренного треугольника

В любом равнобедренном треугольнике:

1) хотя бы одна медиана является его биссектрисой;
2) хотя бы одна биссектриса не является его высотой;
3) хотя бы две высоты равны;
4) хотя бы одна высота лежит внутри его;
5) найдутся две оси симметрии.

Тест 3. Признаки равнобедренного треугольника

Треугольник является равнобедренным, если:

1) у него равны все стороны;
2) у него есть ось симметрии;
3) одна из его биссектрис является его высотой;
4) его вершины находятся в вершинах квадрата;
5) его вершины находятся в концах тех рёбер куба, которые выходят из одной и той же его вершины.

Тест 4. Симметрия

Верны такие утверждения:
1) в любом прямоугольнике не меньше двух осей симметрии и не больше четырёх осей симметрии;
2) существует прямоугольник, у которого нет центра симметрии;
3) существует прямоугольник, у которого три оси симметрии;
4) существует треугольник, у которого есть центр симметрии;
5) существует треугольник, у которого две оси симметрии.

Тест 5. Углы

Про данный угол было высказано несколько утверждений:
А) он больше 60°, но меньше 80°;
Б) угол, вертикальный данному, больше чем 50°;
В) угол, смежный с ним, больше 100°;
Г) угол, смежный с ним, меньше 130°;
Д) биссектриса этого угла образует с его стороной угол, больший, чем 40°;
Е) тупой угол с той же вершиной, что и данный, образованный перпендикулярами к его сторонам, больше 100°, но меньше 120°.

В дальнейшем оказалось, что утверждение А верно. Верно ли при этом:
1) утверждение Б;
2) утверждение В;
3) утверждение Г;
4) утверждение Д;
5) утверждение Е?

Тест 6. Перпендикулярные прямые

Могут быть взаимно перпендикулярны:
1) диагонали прямоугольника;
2) высоты треугольника;
3) диаметры окружности;
4) две прямые, симметричные относительно оси;
5) прямая, содержащая ребро куба, и прямая, содержащая диагональ его грани?

Тест 7. Окружность и круг

В каждом круге:
1) есть самая большая хорда;
2) есть самая маленькая хорда;
3) для каждой хорды найдётся равная ей;
4) существует сектор, который является сегментом;
5) любые две хорды делят его не больше, чем на четыре части.

Тест 8. Сумма углов треугольника

Верны такие утверждения:
1) если в треугольнике один из углов равен сумме двух других углов, то этот треугольник — прямоугольный;
2) если в треугольнике один из углов больше суммы двух других углов, то этот треугольник — тупоугольный;
3) при увеличении одного из углов треугольника другие два угла уменьшаются;
4) если у двух равнобедренных треугольников есть по равному углу, то и остальные их углы равны;
5) в остроугольном треугольнике сумма любых двух его углов больше третьего угла.

Предметный указатель

Аксиома — введение п. 5
— откладывания отрезка 1.3
— откладывания угла 3.3
— о свойстве равных углов 3.2
— параллельности 7.2
— прямоугольника — дополнение п. 1
— сравнения отрезков 1.3

Биссектриса треугольника 3.4
— угла 3.4
Ближайшие точки фигур 6.1
Боковая сторона равнобедренного треугольника 5.1
Большая окружность сферы (шара) 2.6
Вершина многогранника — введение п. 3
— треугольника 4.2
— — равнобедренного 5.1
— угла 3.1
Взаимно обратные утверждения 5.3
Внутренняя точка отрезка 1.1
— — угла 3.1
Высота треугольника 4.8
— пирамиды — задача 6.14

Гипотенуза 4.5
Градусная мера угла 3.8
Грань двугранного угла 3.9
— многогранника — введение п. 3

Двугранный угол 3.9
Диагональ прямоугольного параллелепипеда — задача 2.34
Диаметр окружности (круга) 2.2
— сферы (шара) 2.5
Длина отрезка 1.5
Доказательство способом от противного 4.7
Дуга окружности (круга) 2.2

Катет 4.5
Квадрат — введение п. 3

Круг 2.1
Куб — введение п. 3

Линейный угол двугранного угла 3.9
Луч 1.2

Медиана треугольника 4.2
Мера угла 3.8

Наклонная к прямой 6.1
Неравенство треугольника 6.2

Объединение фигур — введение п. 3
Окружность 2.1
Окружности концентрические 2.1
Основание равнобедренного треугольника 5.1
Ось симметрии 5.5
Отрезок 1.1

Параллелепипед прямоугольный — введение п. 3
Параллелограмм 2.3
Параллельные отрезки задача 7.3
— плоскости — введение п. 4
— прямые 1.2
Пересекающиеся плоскости — введение п. 4
— прямые 1.2
Пересечение фигур — введение п. 3
Периметр многоугольника — задача 1.39
Перпендикуляр 4.6
— к плоскости 6.1
Перпендикулярность плоскостей 3.9
— прямой и плоскости 6.1
— прямых 3.6
Пирамида — введение п. 3
Плоскость — введение п. 4
Полоса 7.6
Полуплоскость 1.2
Полупространство 1.2
Полупрямая 1.2

Построения циркулем и линейкой 2.4
Постулат — введение п. 5
Прямая 1.2
Прямой угол 3.4
Прямоугольник — введение п. 3

Равенство окружностей 2.1
— отрезков 1.3
— прямоугольников 7.5
— треугольников 1.6
— углов 3.2
— фигур 1.6
Радиус окружности (круга) 2.1
— сферы (шара) 2.5
Расстояние между точками 1.5
— от точки до фигуры 6.1
— фигурами 6.1
Ребро двугранного угла 3.9
— многогранника — введение п. 3
Ромб — задача 7.4

Сегмент круга 2.2
Сектор круга 2.2
Середина отрезка 1.3
Серединный перпендикуляр отрезка 5.2
Симметрия центральная (относительно точки) 2.3
— осевая 5.5
Сложение отрезков 1.4
— углов 3.7
Средняя линия четырёхугольника — задача 7.26
Сторона треугольника 1.6, 4.2
— угла 3.1
Сумма отрезков 1.4
— углов 3.7
Сфера 2.5

Теорема 4.1
Тетраэдр 1.1
— правильный — задача II.1
Точка — введение п. 4
Треугольник 1.6, 4.2
— остроугольный 4.5
— прямоугольный 4.5
— равнобедренный — задача 1.39
— равносторонний — задача 1.22
— тупоугольный 4.5
Угол 3.1
— внешний треугольника 4.5
— выпуклый 3.1
— между отрезками 3.1
— невыпуклый 3.1
— острый 3.4
— под которым виден отрезок 3.3
— полный 7.1
— прямой 3.4
— развёрнутый 3.1
— треугольника 4.2
— тупой 3.4
Углы вертикальные 3.6
— внутренние накрест лежащие 7.1
— внутренние односторонние 7.1
— смежные 3.1
— соответственные 7.1
Фигура (геометрическая) — введение п. 1

Хорда окружности 2.2
— угла 3.2
— фигуры 2.2
Хорды угла соответственные 3.2

Центр окружности (круга) 2.1
— сферы (шара) 2.5
Цилиндр 7.7

Численное значение величины угла 3.8
— — длины отрезка 1.5

Шар 2.5
Ширина полосы 7.6

Элементы треугольника 4.2

Ответы

1.1. а) 6; б) 9; в) 6; г) 10; д) 18; е) 30. **1.9.** а) 3; б) 6; в) $0{,}5n(n-1)$. **1.11.** 4. **1.13.** 3 прямые и 12 лучей. **1.14.** 3 или 1. **1.16.** 1, 4 или 6. **1.18.** а) 10; б) $0{,}5n(n-1)$. **1.19.** а) 6; б) 4. **1.32.** 4, 8 или 12. **1.45.** а) 24 мм; б) 68 мм. **1.46.** а) 48 мм; б) 16 мм; в) 64 мм. **1.47.** а) 8 см и 4 см; б) 24 см и 12 см. **1.48.** а) 9; б) 1; в) 4. **1.49.** а) 4; б) 5 или 1; в) $d=0{,}5|a-b|$. **1.50.** $0{,}5a$. **1.51.** 15 и 5. **1.56.** а) 21; 4 м; 2 м; б) 300. **1.61.** 3, если $AC \neq BC$, или 1, если $AC=BC$. **1.62.** 4. **1.65.** Возможны такие случаи: две равные грани, две пары равных граней, три равные грани, четыре равные грани.

2.30. а) На 3 или на 4; б) от 4 до 7. От 5 до 11. **2.31.** а) Две; б) две; в) одну; г) ни одной. **2.51.** 4. **2.52.** На 6 или на 8.

3.8. 12. **3.9.** 16. **3.29.** 24. **3.37.** 10. **3.38.** 3. **3.45.** На 7. **3.47.** 6 пар. **3.75.** 115° и 65°. **3.76.** а) 30′ и 89°30′; б) $\left(\frac{90}{91}\right)^\circ$ и $90\cdot\left(\frac{90}{91}\right)^\circ$; в) 36° и 54°. **3.77.** 20°. **3.78.** а) 17; б) 60°; в) 10°. **3.79.** а) 135° и 45°; б) 18° и 172°. **3.80.** а) Меньше 89°; б) больше 1°; в) больше 44°, но меньше 46°; г) меньше 45°; д) больше 30°, но меньше 45°.

I.2. а) $\frac{7}{3}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{13}{3}$; б) $\frac{10}{7}$; $\frac{20}{7}$; $\frac{40}{7}$; в) 4; 2; 4; г) 3,4; 2,2; 4,4.

I.3. $d=\frac{b+c}{2}$, $b=BC$, $c=AC$, $d=CD$ **I.4.** а) 2 или 6; б) 10 или 2. **I.5.** Если $AX=BX+CX$, то $AX=5$ или $AX=5:3$. **I.6.** $0{,}5(v_1+v_2)$ **I.7.** s или $s+2vt$ **I.8.** а) 1м, 0м, 0м; б) 1с и 19с; в) 90с. **I.9.** а) 3м, 3м, 3м; б) 90 раз; в) 31 раз. **I.10.** а) 3с; б) 1с. **I.11.** а) 20 см; б) 250 с. **I.12.** а) 1 м; в) [0,8 м; 0,9 м], [0,9 м; 1 м]. **I.13.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{11}{24}$ или $\frac{1}{3}$. **I.14.** 0,5. **I.15.** 15° или 75°. **I.16.** а) 20°; б) 140°; в) $|\beta\pm0{,}5\alpha|$. **I.17.** а), б) 80°; в) любой. **I.18.** 90°; 50°. **I.19.** 3 и 4; 4 и 8; 5 и 14. **I.20.** а) На 3 или на 4; б) 4, 5, 6, 7; в) наименьшее — 5, наибольшее — 11. **I.21.** а) 3; б) 5; в) 3; г) 4. **I.26.** $1+0{,}5n(n+1)$. **I.36.** а) 15 м через неделю и 20 м через 2 недели; б) через 20 суток. **I.37.** а) 6°; б) 30°; 75°; 172,5°; 2,5°; 95,5°. **I.40.** а, б) 45°; в) 135°; г) 90°; д) 180°; е) 90°.

5.7. а) 30 см и 35 см; б) 20 см и 40 см; в) $\frac{300}{7}$ см и $\frac{200}{7}$ см. **5.8.** а) 7 см. **II.4.** а) $x=29\frac{1}{3}$; б) $a=34$; в) $b=40$. **II.7.** а) 1 м через 1 с, 1,5 м через 1,5 с, 1 м через 2 с, 1 м через 10 с; б) 0,1 с; 0,2 с.

6.20. а) 15 или 18; б) 20. **6.21.** Любым, большим 20. **6.22.** Любым в интервале (20, 40). **6.23.** а) (1; 3); б) (0; 4); в) $(|a-b|;\ a+b)$. **6.24.** а) (30; 54); б) (28; 56); в) (28; 58).

7.35. а) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{10}$; в) $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{10}$.

8.3. а) 70°; б) 75°; в) 80°; г) 72°; д) 120°; е) 80°; ж) 36°. **8.4.** а) 10°; б) 46°; в) 149°8′58″. **8.5.** а) Прямоугольный; б) тупоугольный; в) остроугольный; г) тупоугольный. **8.6.** а) 50° и 80°; б) 20° и 80°; в) 45° и 90°; г) 20° и 80°. **8.7.** 90°. **8.14.** От 128° до 130°. **8.15.** а) Меньший угол в интервале (0°,45°), больший угол равен 90°; б, в) меньший угол в интервале (0°, 60°), а больший угол в интервале (60°, 180°). **8.23.** а) 35°; б) 130°; в) 90°; г) 130°; д) 100°; е) 90° .**8.24.** От 0° до 65°.

III.2. 720°. **III.3.** а) Основание — в интервале $(0;\ \frac{1}{2})$, боковая сторона — в интервале $(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2})$; б) в интервале $(\frac{10}{3};\ 5)$. **III.5.** $\frac{(n-1)n}{2}$. **III.29.** Удвоенная диагональ прямоугольника.

Список рекомендуемой литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Планиметрия. Ч. 1/ Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1957. Смотрите также в Интернете по адресу: http://ilib.mirror1.mccme.ru/

2. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение/ И. И. Александров. — М.: МЦНМО, 2010.

3. *Вернер А. Л.* Стереометрия. Учеб. пособие для учащихся 7—9 классов общеобразоват. учреждений/ А. Л. Вернер, Т. Г. Ходот. — М.: Просвещение, 2006.

4. *Веннинджер М.* Модели многогранников/ М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974.

5. *Делоне Б. Н.* Задачник по геометрии/ Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л., ГИТТЛ, 1950.

6. Журнал «Квант». Раздел «Задачи для младших школьников». Смотрите также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/.

7. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия/ К. Левитин. — М.: Знание, 1984.

8. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия/ Я. И. Перельман. — М.: АСТ: Астрель, 2002.

9. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии/ В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

10. *Ходот Т. Г.* Математика. Наглядная геометрия. Учеб. для учащихся 5 кл. общеобразоват. учреждений/ Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот, В. Л. Велиховская. — М.: Просвещение, 2006.

11. *Ходот Т. Г.* Математика. Наглядная геометрия. Учеб. для учащихся 6 кл. общеобразоват. учреждений/ Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот. — М.: Просвещение, 2007.

Учебное издание

Серия «Академический школьный учебник»

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич
Ходот Татьяна Георгиевна

ГЕОМЕТРИЯ

7 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *А. В. Щетинцева*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика: *А. Г. Вьюниковская, И. В. Губина*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *И. Ю. Соколовой, О. А. Карповой*
Корректоры *Л. А. Ермолина, А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 03.07.2012. Формат $70\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 12,38 + 0,51 форз. Тираж 3000 экз. Заказ № 2397.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.